Weierstraß-Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik

Leibniz
Gemeinschaft

Die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Wissenschaft

Wolfgang König

Warum eine Wahrscheinlichkeitstheorie?

- Philosophische Fragen:
  - Was ist Zufall?
  - Was ist Wahrscheinlichkeit?
  - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

Warum eine Wahrscheinlichkeitstheorie?

- Philosophische Fragen:
  - Was ist Zufall?
  - Was ist Wahrscheinlichkeit?
  - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Anwendungen im Glücksspiel, bei Versicherungen und Finanzkursen, später auch in der Physik, beim Wetter und in vielen anderen Gebieten

Warum eine Wahrscheinlichkeitstheorie?

- Philosophische Fragen:
    - Was ist Zufall?
    - Was ist Wahrscheinlichkeit?
    - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Anwendungen im Glücksspiel, bei Versicherungen und Finanzkursen, später auch in der Physik, beim Wetter und in vielen anderen Gebieten

- Anwendung(sversuche) im Rechtswesen

Warum eine Wahrscheinlichkeitstheorie?

- Philosophische Fragen:
  - Was ist Zufall?
  - Was ist Wahrscheinlichkeit?
  - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Anwendungen im Glücksspiel, bei Versicherungen und Finanzkursen, später auch in der Physik, beim Wetter und in vielen anderen Gebieten

- Anwendung(sversuche) im Rechtswesen

- Suche nach Systematik und Gesetzmäßigkeiten

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Frequentistische Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Frequentistische Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

Frequentistische Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

BAYES'sche Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ein Maß dafür, wie stark man von dem Eintreten des Ereignisses überzeugt ist.

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Frequentistische Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

BAYES'sche Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ein Maß dafür, wie stark man von dem Eintreten des Ereignisses überzeugt ist.

- Sehr pragmatisch, aber induziert unerwünschte subjektive Kriterien. (Wieviel wärst Du bereit zu setzen?)
- Es spielt keine Rolle, ob wirklich Zufall im Spiel ist.

Schwierigkeiten

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der Kirche:
   - Glückspiel unerwünscht
   - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.

Schwierigkeiten

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der Kirche:
   - Glückspiel unerwünscht
   - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.
2. von manchen Naturwissenschaftlern der Aufklärung
   - Zufall gibt es nicht, man muss nur genau genug messen
   - Daher gibt es keine seriöse W'Theorie.

Schwierigkeiten

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der Kirche:
   - Glückspiel unerwünscht
   - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.
2. von manchen Naturwissenschaftlern der Aufklärung
   - Zufall gibt es nicht, man muss nur genau genug messen
   - Daher gibt es keine seriöse W'Theorie.
3. von manchen Mathematikern
   - große Diskrepanz zwischen unsicheren Ereignissen und der Mathematik als Lehre der gesicherten Erkenntnis.

Schwierigkeiten

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der Kirche:
   - Glückspiel unerwünscht
   - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.
2. von manchen Naturwissenschaftlern der Aufklärung
   - Zufall gibt es nicht, man muss nur genau genug messen
   - Daher gibt es keine seriöse W'Theorie.
3. von manchen Mathematikern
   - große Diskrepanz zwischen unsicheren Ereignissen und der Mathematik als Lehre der gesicherten Erkenntnis.
4. von der Existenz gewisser Paradoxa und logischen Problemen wie etwa
   - dem Gefangenenparadoxon,
   - der Existenz von Ereignissen mit Wahrscheinlichkeit Null,
   - Wahrscheinlichkeiten auf Kugeloberflächen oder anderen Kontinuen.

Das Problem

Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
Hat er Recht?

Das Problem

Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
Hat er Recht?

- Wichtig: Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit nennt.
- Dann lautet die Antwort Nein, denn Ws Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenswahrscheinlichkeit von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt B}) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt}, W \text{ nennt B})}{\mathbb{P}(W \text{ nennt B})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Das Gefangenenparadoxon

Das Problem

Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
Hat er Recht?

- Wichtig: Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit nennt.
- Dann lautet die Antwort Nein, denn Ws Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenswahrscheinlichkeit von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt B}) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt}, W \text{ nennt B})}{\mathbb{P}(W \text{ nennt B})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

- Falls W allerdings B mit Wahrscheinlichkeit p nennt, falls B und C hingerichtet werden, so ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit von A als $\frac{p}{1+p}$!

Der berühmte Briefwechsel Pascal - Fermat

BLAISE PASCAL beschrieb am 29. Juli 1654 in einem Brief an PIERRE DE FERMAT zwei Probleme, die ihm von seinem Freund ANTOINE GOMBAUD, CHEVALIER DE MÉRÉ zugetragen wurden. Pascal und Fermat lösten diese Probleme, indem sie fundamentale Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zunächst klärten. Diese neuen Herangehensweisen wurden noch von Zeitgenossen als der Beginn einer wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitstheorie gefeiert, wenn diese neuen Ideen auch erst im Jahre 1679 veröffentlicht wurden.

BLAISE PASCAL (1623-1662)

PIERRE DE FERMAT (1607/8-1667)

Die de Méré'schen Probleme (1)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

Die de Méré'schen Probleme (1)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von FRA LUCA PACCIOLI, falsche Lösung publiziert von NICCOLO TARTAGLIA

Die de Méré'schen Probleme (1)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von Fra Luca Paccioli, falsche Lösung publiziert von Niccolo Tartaglia
- Was heißt 'gerecht'? Nach den Gewinnchancen! (sonst Vorschläge: $5:3$, im Verhältnis der gewonnenen Runden, oder $2:1$.)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von Fra Luca Paccioli, falsche Lösung publiziert von Niccolo Tartaglia
- Was heißt 'gerecht'? Nach den Gewinnchancen! (sonst Vorschläge: $5:3$, im Verhältnis der gewonnenen Runden, oder $2:1$.)
- richtige Lösung: $7:1$, denn in sieben von acht möglichen fiktiven Fortsetzungen gewinnt der Führende.

Die de Méré'schen Probleme (2)

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ *etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance* $\frac{1}{36}$*), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.*
Es gilt also **nicht** *die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

Die de Méré'schen Probleme (2)

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ *etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance* $\frac{1}{36}$*), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.*
Es gilt also **nicht** *die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

- verwirrend wegen ungenügender Unterscheidung zwischen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten.

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.
Es gilt also **nicht** *die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

- verwirrend wegen ungenügender Unterscheidung zwischen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten.
- Dass die Antworten $1 - (5/6)^4 \approx 0,5177$ und $1 - (35/36)^{24} \approx 0,4914$ sind, war Herrn de Méré klar. Er suchte nach einem Grund, warum die Regel nicht gelten solle. Mit Pascals Antwort war er nicht zufrieden.

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.
Es gilt also **nicht** *die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

- verwirrend wegen ungenügender Unterscheidung zwischen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten.
- Dass die Antworten $1-(5/6)^4 \approx 0,5177$ und $1-(35/36)^{24} \approx 0,4914$ sind, war Herrn de Méré klar. Er suchte nach einem Grund, warum die Regel nicht gelten solle. Mit Pascals Antwort war er nicht zufrieden.
- ABRAHAM DE MOIVRE zeigte 1718, dass die Regel nur in einem geeigneten asymptotischen Sinne stimmt.

Christiaan Huygens: erste Publikation

Die erste Monographie über Wahrscheinlichkeitsrechnung, De Rationiciis in Aleae Ludo, veröffentlichte CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) im Jahre 1657. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg. Seine Überlegungen zu den Themen "Gerechtigkeit" und "Erwartungswert" gingen weit über jene von Cardano, Pascal und Fermat hinaus. Insbesondere erhielt er eine neue Lösung des de Méré'schen Teilungsproblems.

Christiaan Huygens: erste Publikation

Die erste Monographie über Wahrscheinlichkeitsrechnung, De Rationiciis in Aleae Ludo, veröffentlichte CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) im Jahre 1657. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg. Seine Überlegungen zu den Themen "Gerechtigkeit" und "Erwartungswert" gingen weit über jene von Cardano, Pascal und Fermat hinaus. Insbesondere erhielt er eine neue Lösung des de Méré'schen Teilungsproblems.

Huygens war auch einer der führenden Physiker und Astronomen des 17. Jahrhunderts. Er begründete die Wellentheorie des Lichts, konstruierte die ersten Pendeluhren und verbesserte Teleskope, so dass neue Himmelskörper damit entdeckt wurden.

Weitere Meilensteine (1)

- Gerolamo Cardano (1501-1576) schrieb 1524 das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung: De Ludo Aleae (1663 veröffentlicht).

Weitere Meilensteine (1)

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung: De Ludo Aleae (1663 veröffentlicht).

- Auf Basis von Huygens' Lehre vom Erwartungswert bewies JOHN TILLOTSON (Erzbischof von Canterbury), dass sich der Glaube an Gott lohne. Er benutzt, dass das Ereignis, dass Gott existiert, positive Wahrscheinlichkeit hat.

Weitere Meilensteine (1)

- Gerolamo Cardano (1501-1576) schrieb 1524 das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung: De Ludo Aleae (1663 veröffentlicht).

- Auf Basis von Huygens' Lehre vom Erwartungswert bewies John Tillotson (Erzbischof von Canterbury), dass sich der Glaube an Gott lohne. Er benutzt, dass das Ereignis, dass Gott existiert, positive Wahrscheinlichkeit hat.

- Johan de Wit (1625-1672) berechnet Mortalitätsmodelle und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen

Weitere Meilensteine (1)

- Gerolamo Cardano (1501-1576) schrieb 1524 das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung: De Ludo Aleae (1663 veröffentlicht).

- Auf Basis von Huygens' Lehre vom Erwartungswert bewies John Tillotson (Erzbischof von Canterbury), dass sich der Glaube an Gott lohne. Er benutzt, dass das Ereignis, dass Gott existiert, positive Wahrscheinlichkeit hat.

- Johan de Wit (1625-1672) berechnet Mortalitätsmodelle und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen

- Jakob Bernoulli (1655-1705) benutzt in Ars Conjectandi (1713) Kombinatorik, betrachtet Folgen von Zufallsgrößen und beweist ein Gesetz der Großen Zahlen.

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.

- THOMAS BAYES (1702-1761) führt bedingte Wahrscheinlichkeiten ein und begründet die Statistik.

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.

- THOMAS BAYES (1702-1761) führt bedingte Wahrscheinlichkeiten ein und begründet die Statistik.

- Verfeinerungen und philosophische Betrachtungen, aber Sackgasse bis etwa 1895.

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.

- THOMAS BAYES (1702-1761) führt bedingte Wahrscheinlichkeiten ein und begründet die Statistik.

- Verfeinerungen und philosophische Betrachtungen, aber Sackgasse bis etwa 1895.

- Mathematische Durchbrüche: Mengenlehre (CANTOR 1895), HILBERT'sches 6. Problem, Maßtheorie (BOREL 1901), Integrationstheorie (LEBESGUE 1902).

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.

- THOMAS BAYES (1702-1761) führt bedingte Wahrscheinlichkeiten ein und begründet die Statistik.

- Verfeinerungen und philosophische Betrachtungen, aber Sackgasse bis etwa 1895.

- Mathematische Durchbrüche: Mengenlehre (CANTOR 1895), HILBERT'sches 6. Problem, Maßtheorie (BOREL 1901), Integrationstheorie (LEBESGUE 1902).

- neuer Schwung in der maßtheoretischen W'Theorie: Konstruktion der Brown'schen Bewegung (WIENER 1923), abschließende Axiomatik der W'Theorie (KOLMOGOROV 1933) – Geburt der mathematischen W'Theorie.