Weierstraß-Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik

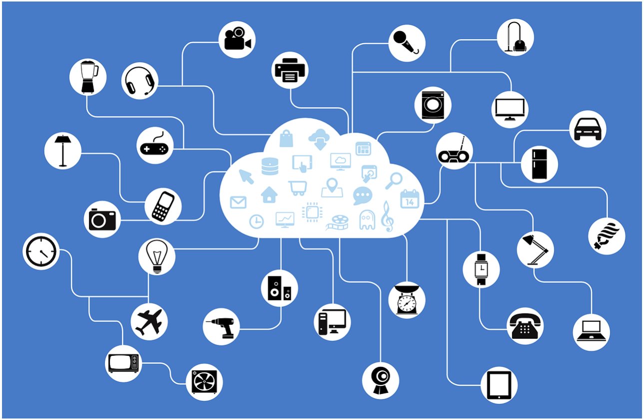
Leibniz-Gemeinschaft

Stochastische Geometrie in Telekommunikation

Wolfgang König
TU Berlin and WIAS

(Dank an BENEDIKT JAHNEL)

"Das Internet der Dinge (IoT) beschreibt die Vernetzung von physikalischen Geräten, Fahrzeugen, Gebäuden und andere Einheiten – ausgestattet mit Elektronik, Software, Sensoren, sowie Netzwerk-Konnektivität, – die es diesen Objekten ermöglicht, Daten zu sammeln und auszutauschen."



pixabay.com

Vorteile:

- Dezentrale Organisation
- Multihop-Nachrichtenübermittlung sind flexibler; es gibt mehr Nachrichtenwege, mehr Nachrichten können behandelt werden
- Robustheit: Eventuelle Störungen sind nur lokal und können leicht umgangen werden

Nachteile:

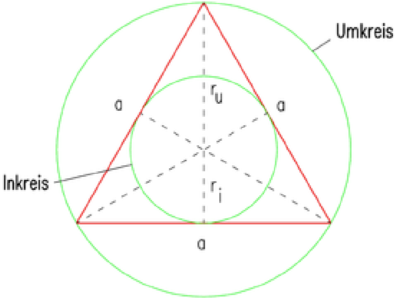
- Riesiger Energieverbrauch durch ständige Bereitschaft
- Höhere Ansprüche an Sicherheit und Verfolgbarkeit
- **Noch zu wenig gesichertes Wissen über Funktionalität**

Herausforderungen an Forschung:

- Hohe Komplexität in Ort und Zeit
- Zufällige Bewegung von manchen Einheiten
- Welches Aufenthalts- und Bewegungsmodell beschreibt die Bevölkerung am besten?

Erste Schritte in der **Stochastischen Geometrie**:
das **Bertrand-Paradoxon** (JOSEPH BERTRAND, 1822-1900).

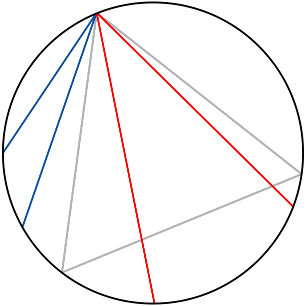
Wir betrachten einen Kreis und ein einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck.



www.wikipedia.de

Eine Kreissehne wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne länger ist als eine Seite des Dreiecks?

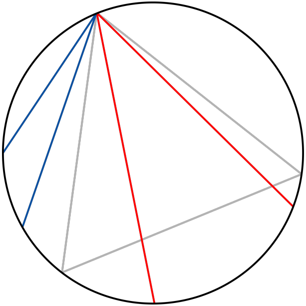
- Verbinde zwei zufällige Punkte auf dem Kreisumfang.
- Drehe das Dreieck so, dass der erste zufällige Punkt eine Ecke des Dreiecks ist.
- Die Sehne ist genau dann länger als die Dreiecks-Seite, wenn der zweite Punkt im gegenüber liegenden Drittelkreis liegt.



www.wikipedia.de

Antwort I: Die Methode der zufälligen Endpunkte

- Verbinde zwei zufällige Punkte auf dem Kreisumfang.
- Drehe das Dreieck so, dass der erste zufällige Punkt eine Ecke des Dreiecks ist.
- Die Sehne ist genau dann länger als die Dreiecks-Seite, wenn der zweite Punkt im gegenüber liegenden Drittelkreis liegt.

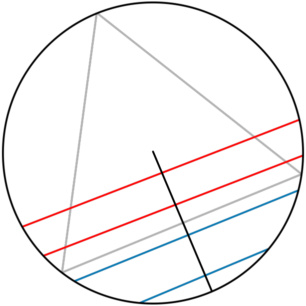


www.wikipedia.de

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1/3

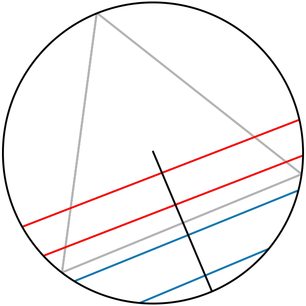
Antwort II: Die Methode des zufälligen Radius

- Wähle einen zufälligen Punkt auf dem Kreisradius und zeichne eine orthogonale Linie.
- Drehe das Dreieck so, dass eine Dreiecksseite ebenfalls orthogonal zum Radius liegt.
- Die Sehne ist genau dann länger als die Dreiecksseite, wenn der gewählte Punkt außerhalb des Dreiecks liegt.



www.wikipedia.de

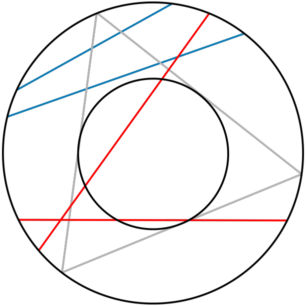
- Wähle einen zufälligen Punkt auf dem Kreisradius und zeichne eine orthogonale Linie.
- Drehe das Dreieck so, dass eine Dreiecksseite ebenfalls orthogonal zum Radius liegt.
- Die Sehne ist genau dann länger als die Dreiecksseite, wenn der gewählte Punkt außerhalb des Dreiecks liegt.



www.wikipedia.de

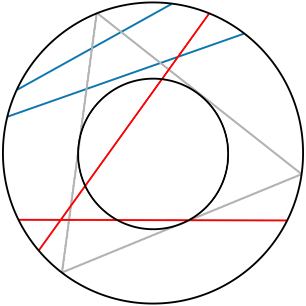
Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1/2

- Wähle einen zufälligen Punkt im Kreisinneren und zeichne eine Linie mit diesem Punkt als Mittelpunkt.
- Die Sehne ist genau dann länger als die Dreiecksseite, falls der Punkt im Inkreis des Dreiecks liegt.
- Das Verhältnis der Flächen der Kreise beträgt $\frac{(R/2)^2\pi}{R^2\pi} = 1/4$.



www.wikipedia.de

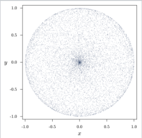
- Wähle einen zufälligen Punkt im Kreisinneren und zeichne eine Linie mit diesem Punkt als Mittelpunkt.
- Die Sehne ist genau dann länger als die Dreiecksseite, falls der Punkt im Inkreis des Dreiecks liegt.
- Das Verhältnis der Flächen der Kreise beträgt $\frac{(R/2)^2\pi}{R^2\pi} = 1/4$.



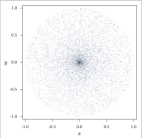
www.wikipedia.de

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1/4

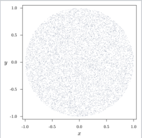
- Eine Sehne ist eindeutig durch ihren Mittelpunkt festgelegt.
- Die drei Methoden resultieren in drei verschiedenen Verteilungen von Mittelpunkten.



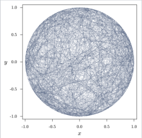
Mittelpunkte der nach Methode 1 zufällig gewählten Sehnen



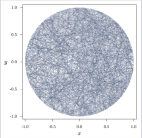
Mittelpunkte der nach Methode 2 zufällig gewählten Sehnen



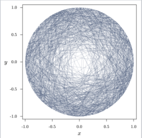
Mittelpunkte der nach Methode 3 zufällig gewählten Sehnen



Nach Methode 1 zufällig gewählte Sehnen



Nach Methode 2 zufällig gewählte Sehnen

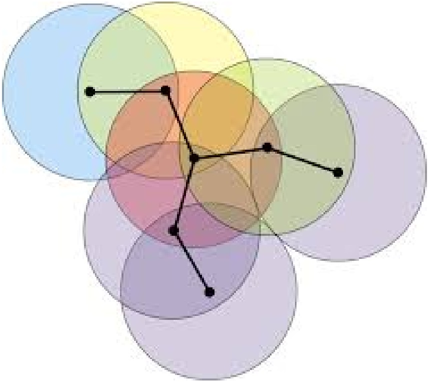


Nach Methode 3 zufällig gewählte Sehnen

www.wikipedia.de

Wir studieren speziellere Netzwerke mit folgenden Eigenschaften:

- zufällige Verteilung von Netzwerkkomponenten im Raum
- statische Situation – keine Zeitkomponente, keine Bewegung
- keine zusätzliche Infrastruktur

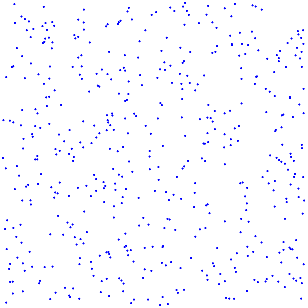


www.wikipedia.de

Ein Poisson'scher Punktprozess mit Parameter $\lambda \in (0, \infty)$ ist eine zufällige, sich nicht häufende Punktwolke X mit folgenden Eigenschaften:

1. Punktwolken in disjunkten Gebieten sind stochastisch unabhängig.
2. Die Anzahl von Punkten in einem Gebiet $A \subset \mathbb{R}^d$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda \text{Vol}(A)$:

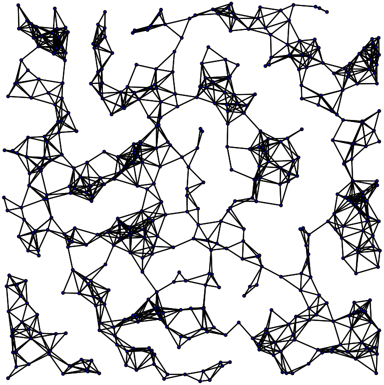
$$\mathbb{P}_\lambda(X \text{ hat genau } k \text{ Punkte in } A) = \exp(-\lambda \text{Vol}(A)) \frac{(\lambda \text{Vol}(A))^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$



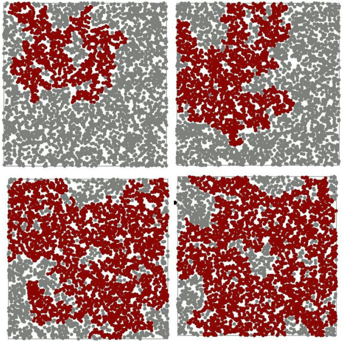
- Der Term $\exp(-\lambda \text{Vol}(A))$ normiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- Der Parameter λ ist die durchschnittliche Zahl der Punkte pro Einheitsquadrat.

EDGAR NELSON GILBERT (1923 – 2013).

- Erstes (1961) einfaches Netzwerk-Modell $G_r(X)$, basierend auf dem Poisson'schen Punktprozess X.
- Definition: Zwei Netzwerk-Komponenten $x, y \in X$ können miteinander kommunizieren, falls ihr Abstand kleiner ist als $r > 0$.



- Dies ist ein Bewertungskriterium der Netzwerk-Konnektivität anhand der Größe von *Clustern* ($=$ maximale verbundene Gebiete).
- Existenz von unendlich großen Clustern wird *Perkolation* genannt.
- Die Hauptfrage lautet: Ist die Perkolationswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_\lambda(G_r(X)$ perkoliert$)$ positiv oder gleich Null?



www.wikipedia.de

Perkolation ist ein Phasenübergangs-Phänomen im Intensitäts-Parameter λ bei festem r. Wir nehmen $r = 1$.

Existenz des Phasenübergangs

Es gibt einen kritischen Wert $\lambda_c \in (0, \infty)$, so dass

$$\lambda < \lambda_c \quad \Longleftrightarrow \quad \text{alle Cluster sind endlich}$$
$$\lambda > \lambda_c \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt einen unendlichen Cluster,}$$

jeweils mit Wahrscheinlichkeit Eins.

Es gibt also zwei Phasen (oder Regimes):

- Im *subkritischen* Regime $\lambda < \lambda_c$ gibt es nur lokale Kommunikation.
- Im *superkritischen* Regime $\lambda > \lambda_c$ ist auch globale Kommunikation möglich.

Bemerkungen:

- Es ist keine Formel für λ_c bekannt.
- Numerische Berechnungen haben ergeben, dass $\lambda_c \approx 1.436$.

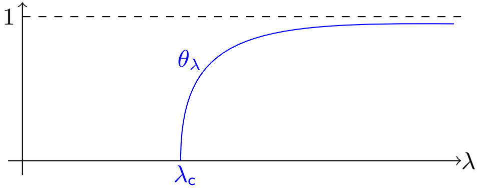
Man konnte ein paar mathematische Theoreme über die Cluster beweisen. Sei $\mathcal{C}(o)$ der Cluster, welcher den Koordinaten-Ursprung o enthält.

- Im sub-kritischen Regime haben große Cluster kleine Wahrscheinlichkeit: Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $s \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}_\lambda(\#\mathcal{C}(o) \geq s) \leq \exp(-Cs).$$

- Im super-kritischen Regime gibt es mit Wahrscheinlichkeit Eins nur einen Cluster.
- Im super-kritischen Regime ist die Perkolations-Wahrscheinlichkeit positiv:

$$\theta_\lambda = \mathbb{P}_\lambda(\#\mathcal{C}(o) = \infty) > 0.$$



Hier sind ein paar interessante mathematische Fragen:

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gegebene Orte verbunden sind in Abhängigkeit vom Abstand der Orte?

$$p_\lambda(s) = \mathbb{P}\big(o \leftrightsquigarrow (s, 0, \dots, 0)\big) = ?$$

2. Wie hoch ist der erwartete Anteil der verbundenen Paare von Komponenten in einer großen Box B?

$$\pi_\lambda(B) = \frac{1}{|B|^2}\mathbb{E}\big[\#\{(x, y) \in B \times B \colon (x \leftrightsquigarrow y)\}\big] = ?$$

3. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gegebene Orte verbunden sind, wenn die Anzahl der Hops beschränkt wird?

$$p_\lambda(\alpha, s) = \mathbb{P}_\lambda\big(o \leftrightsquigarrow (s, 0, \dots, 0) \,|\, \#\,\text{Hops} < \alpha s\big) = ?$$

Die mathematisch streng bewiesenen Antworten sind oftmals nur asymptotisch, d.h. für Grenzwerte von Parametern, hier für große s. Zur Erinnerung: $\theta_\lambda = \mathbb{P}_\lambda(\#\mathcal{C}(o) = \infty)$.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gegebene Orte verbunden sind in Abhängigkeit vom Abstand der Orte?

$$\lim_{s\uparrow\infty} p_\lambda(s) = \theta_\lambda^2.$$

2. Wie hoch ist der erwartete Anteil der verbundenen Paare von Punkten in einer großen Box B?

$$\lim_{B\uparrow\mathbb{R}^d} \pi_\alpha(B) = \theta_\lambda^2.$$

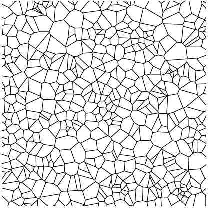
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gegebene Orte verbunden sind, wenn die Anzahl der Hops beschränkt wird?

$$\lim_{s\uparrow\infty} p_\lambda(\alpha, s) = \theta_\lambda^2, \qquad \text{falls } \alpha \geq \mu, \quad \text{sonst } = 0,$$

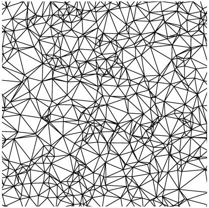
wobei $\mu \in (0, \infty)$ eine charakteristische Größe ist.

Modelle für Straßensysteme

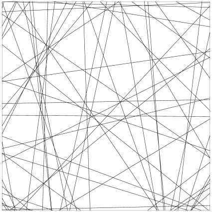
Auf der Basis eines Poisson'schen Punktprozesses können viele Kachelungen definiert werden.



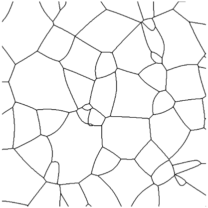
Voronoi Tessellation



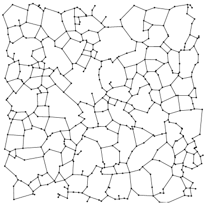
Delaunay Tessellation



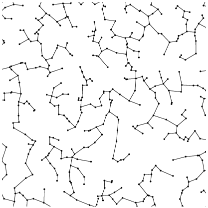
Line Tessellation



Johnson-Mehl Tessellation



Relative neighborhood graph

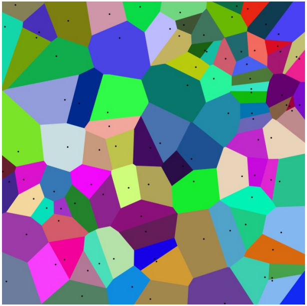


Minimum spanning forest

Definition: Die *Voronoi-Zelle* zum Punkt $x \in X$ ist gegeben durch

$$Z(x) = \{z \in \mathbb{R}^d \colon |z - x| < |z - y| \text{ für alle } y \in X \setminus \{x\}\}.$$

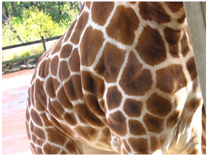
(Interpretation: Einzugsgebiet des Supermarkts am Punkte x.)



www.wikipedia.de

Statistische Untersuchungen ergaben: Die Straßensysteme vieler europäischer Städte sehen so aus wie die Kanten dieser Kachelung.

Poisson-Voronoi-Kachelungen



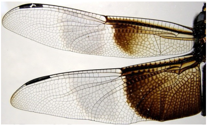
Giraffenhaut

Schlammstruktur

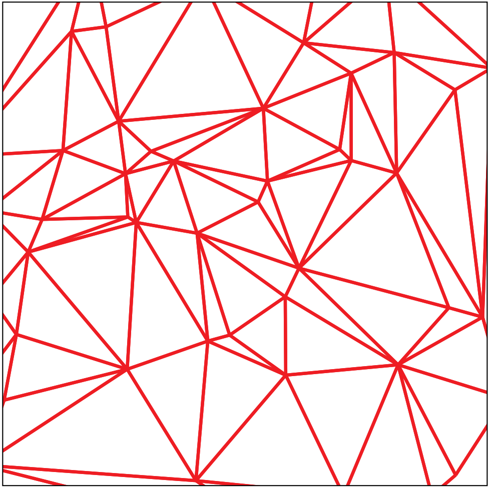
Feldstruktur

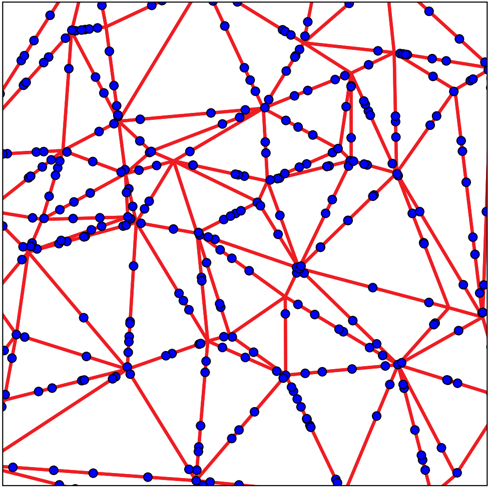
Architektur: Airspace Tokyo

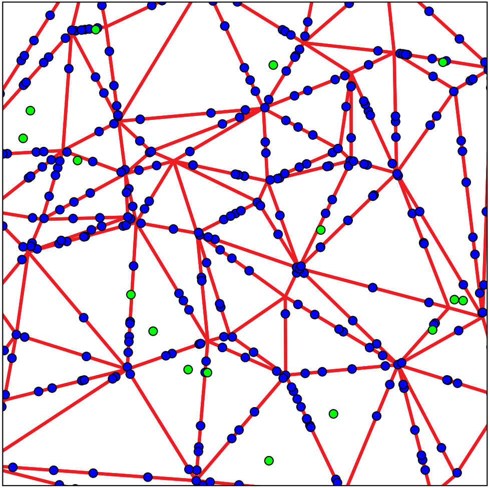
Design

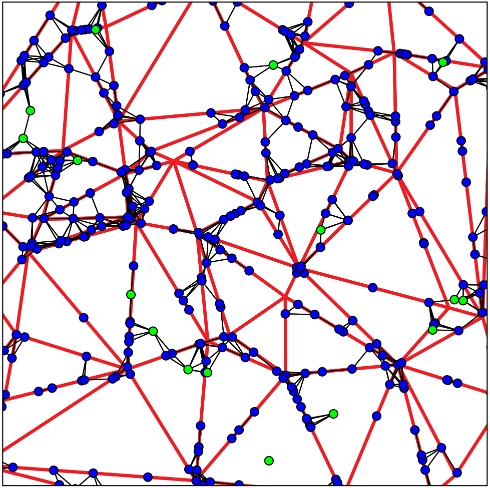


Libellenflügel









- Beantworte die selben Fragen für Poissonprozesse auf Kachelungen.
- Beziehe Interferenz in die Überlegungen ein. Verteile die Hops der Nachrichten auf mehrere Zeitpunkte, um die Interferenz zu kontrollieren.
- Betrachte die Nachrichtenwege: Gibt es Verstopfung? Optimale Routings?
- Betrachte zufällige Bewegungen der mobilen Teilnehmer.
- undundund