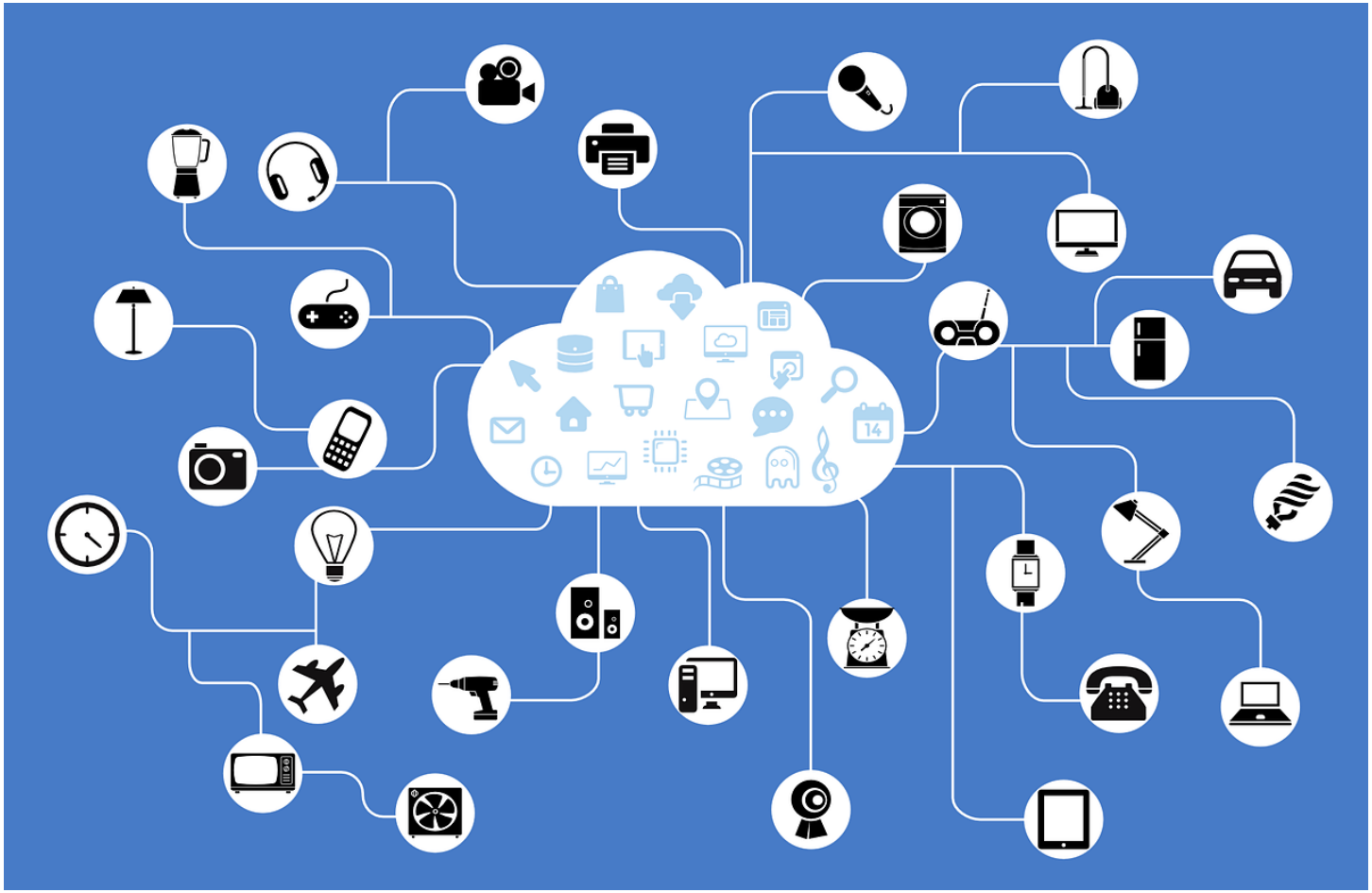
Weierstraß-Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik

Leibniz-Gemeinschaft

Zufällige Geometrie und das Internet der Dinge

Dr. Benedikt Jahnel

Das Internet der Dinge - Alles ist vernetzt



pixabay.com

"Das Internet der Dinge (IoT) beschreibt die innere Vernetzung von physikalischen Geräten, Fahrzeugen, Gebäuden und andere Einheiten - ausgestattet mit Elektronik, Software, Sensoren, sowie Netzwerk-Konnektivität - die es diesen Objekten ermöglicht, Daten zu sammeln und auszutauschen."

www.jisc.ac.uk

Geschichte

- 1982 Carnegie Mellon University (USA): Das erste mit dem Internet verbundene Haushaltsgerät - eine Coca-Cola Maschine
- 1991 Mark Weiser (Xerox PARC): “The Computer for the 21st Century” (Ubiquitous Computing)
- 1999 Bill Joy (Sun Microsystems) Vortrag auf dem World Economic Forum in Davos: Device to Device (D2D) Kommunikation
- 1999 Kevin Ashton (Auto-ID Center): Begriffsbildung “Internet of Things”

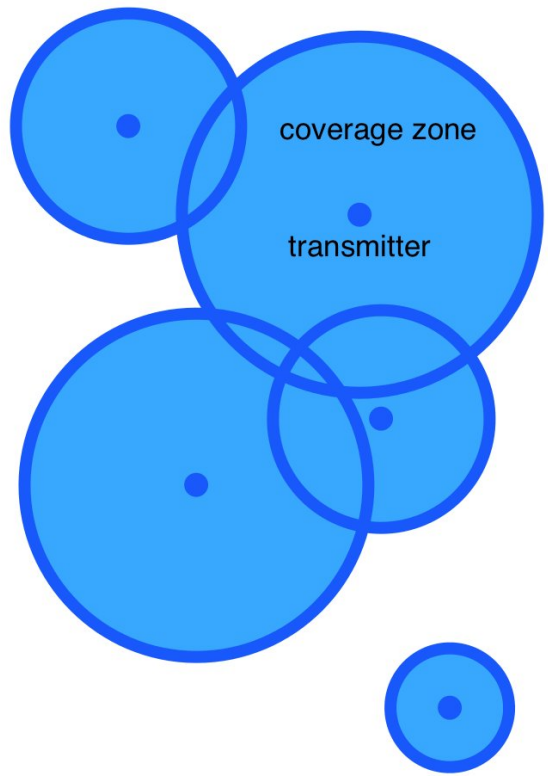
Herausforderungen

- Hohe Komplexität in Ort und Zeit
- Große Anzahl von Einheiten
- Zufällige Bewegung von Einheiten
- Gemeinsame Kommunikations-Technologie ...

Mathematik kann helfen grundlegende Eigenschaften von IOT-Systemen besser zu verstehen.

Albert Einstein: "Mache die Dinge so einfach wie möglich - aber nicht einfacher."

Galileo Galilei: "Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen."

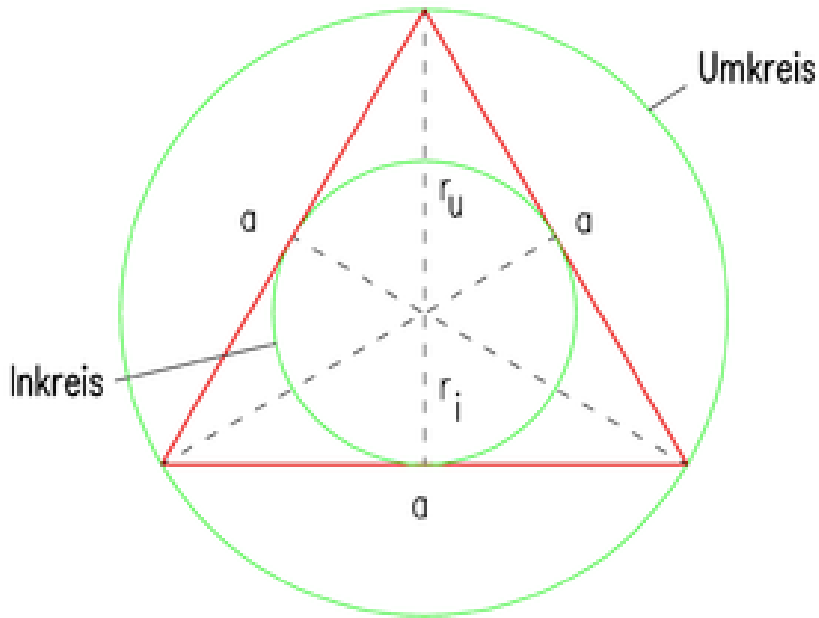


www.wikipedia.de

Stochastische Geometrie

Zum Aufwärmen das **Betrand-Paradoxon** (J. Bertrand, 1822-1900)

Wir betrachten einen Kreis und ein einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck.

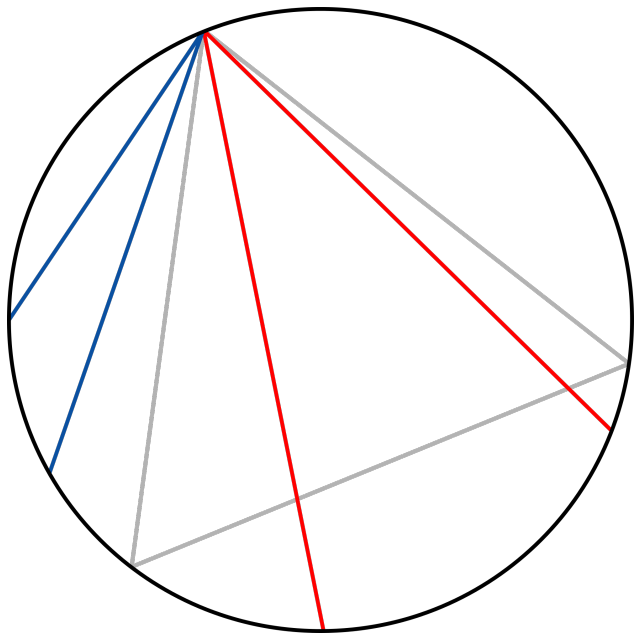


www.wikipedia.de

Eine Kreissehne wird zufällig ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne länger ist als eine Seite des Dreiecks?

Antwort I: Die zufällige Endpunkte - Methode

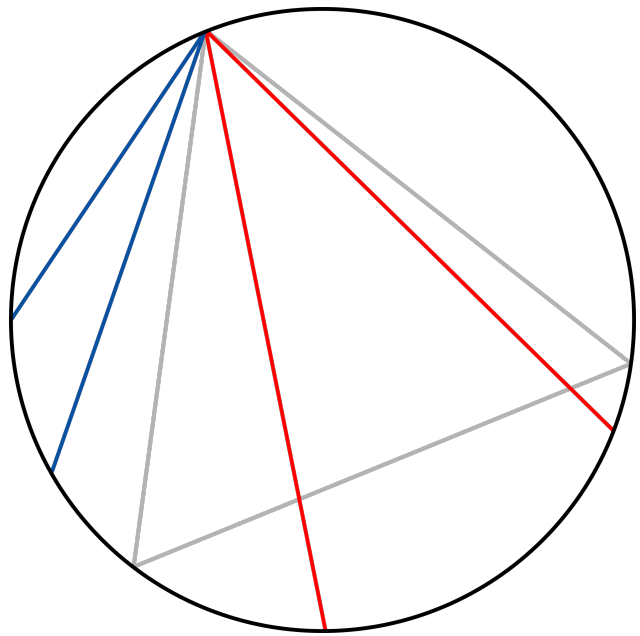
- Verbinde zwei zufällige Punkte auf dem Kreisumfang.
- Drehe das Dreieck so, dass der erste zufällige Punkt eine Ecke des Dreiecks ist.
- Die Sehne ist nun genau dann länger als die Dreiecks-Seite, wenn der zweite Punkt im gegenüberliegenden Drittel-Kreis liegt.



www.wikipedia.de

Antwort I: Die zufällige Endpunkte - Methode

- Verbinde zwei zufällige Punkte auf dem Kreisumfang.
- Drehe das Dreieck so, dass der erste zufällige Punkt eine Ecke des Dreiecks ist.
- Die Sehne ist nun genau dann länger als die Dreiecks-Seite, wenn der zweite Punkt im gegenüberliegenden Drittel-Kreis liegt.

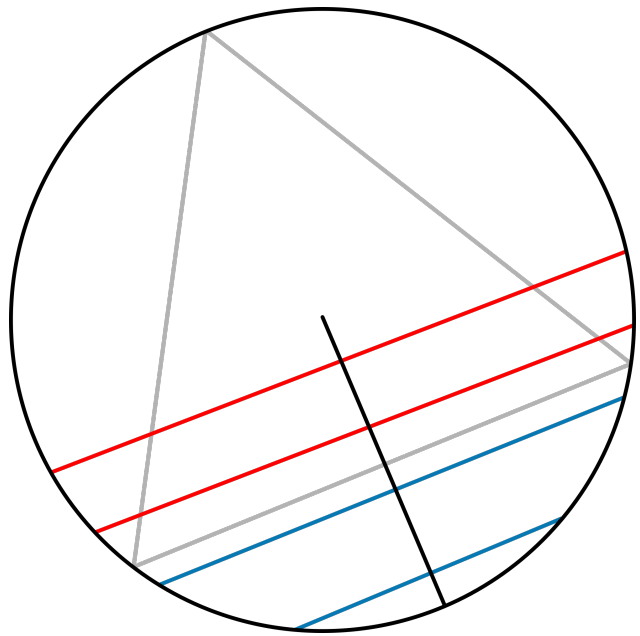


www.wikipedia.de

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1/3

Antwort II: Die zufälliger Radius - Methode

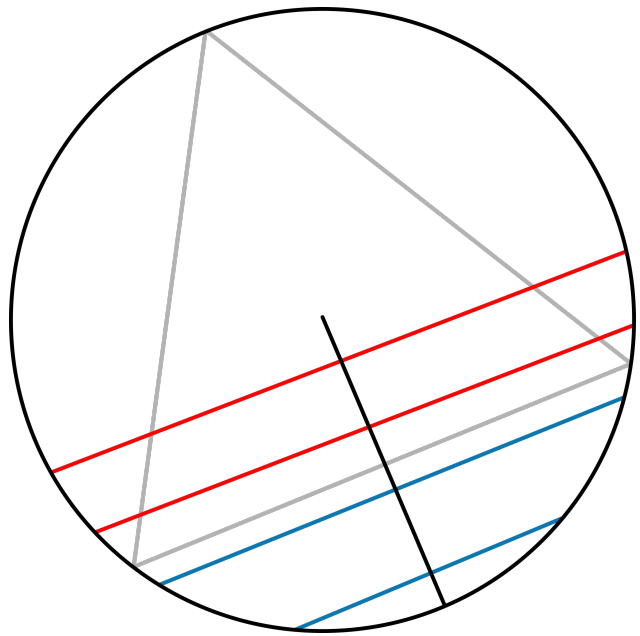
- Wähle einen zufälligen Punkt auf dem Kreis-Radius und zeichne eine orthogonal Linie.
- Drehe das Dreieck so, dass eine Dreiecks-Seite ebenfalls orthogonal zum Radius liegt.
- Die Sehne ist nun genau dann länger als die Dreiecks-Seite, wenn der gewählte Punkt ausserhalb des Dreiecks liegt.



www.wikipedia.de

Antwort II: Die zufälliger Radius - Methode

- Wähle einen zufälligen Punkt auf dem Kreis-Radius und zeichne eine orthogonal Linie.
- Drehe das Dreieck so, dass eine Dreiecks-Seite ebenfalls orthogonal zum Radius liegt.
- Die Sehne ist nun genau dann länger als die Dreiecks-Seite, wenn der gewählte Punkt ausserhalb des Dreiecks liegt.

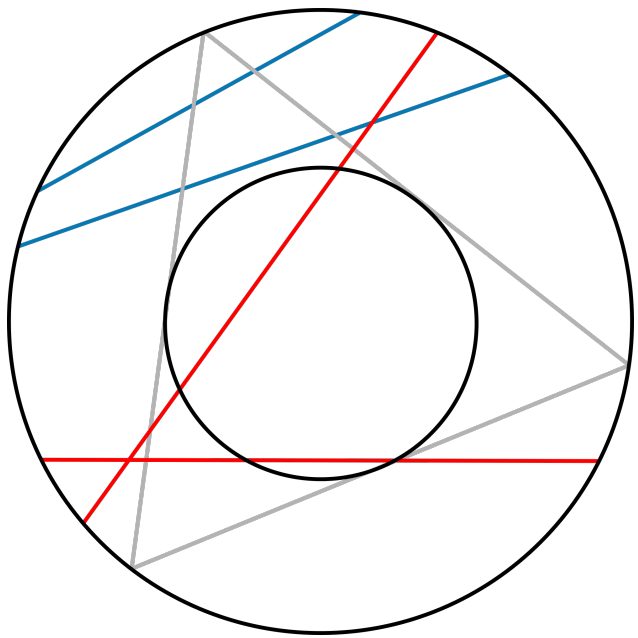


www.wikipedia.de

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1/2

Antwort III: Die zufälliger Mittelpunkt - Methode

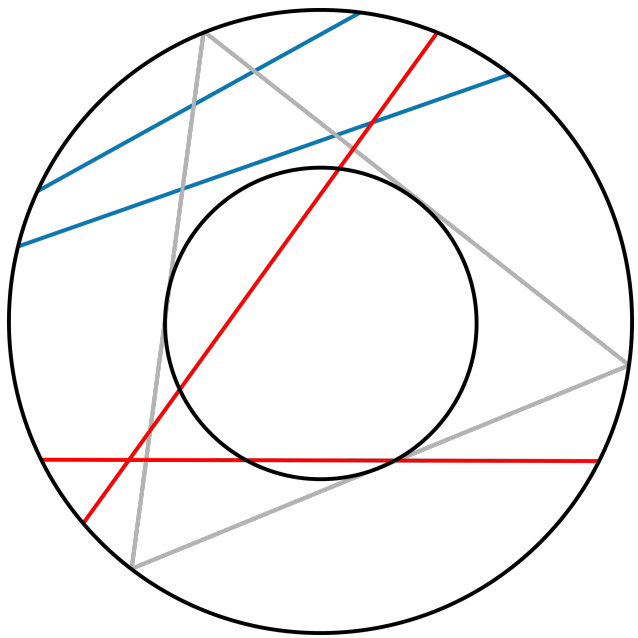
- Wähle einen zufälligen Punkt im Kreisinneren und zeichne eine Linie mit diesem Punkt als Mittelpunkt.
- Die Sehne ist nun genau dann länger als die Dreiecks-Seite, falls der Punkt im Inkreis des Dreiecks liegt.
- Das Verhältnis der Flächen der Kreise beträgt $\frac{(R/2)^2\pi}{R^2\pi} = 1/4$.



www.wikipedia.de

Antwort III: Die zufälliger Mittelpunkt - Methode

- Wähle einen zufälligen Punkt im Kreisinneren und zeichne eine Linie mit diesem Punkt als Mittelpunkt.
- Die Sehne ist nun genau dann länger als die Dreiecks-Seite, falls der Punkt im Inkreis des Dreiecks liegt.
- Das Verhältnis der Flächen der Kreise beträgt $\frac{(R/2)^2\pi}{R^2\pi} = 1/4$.

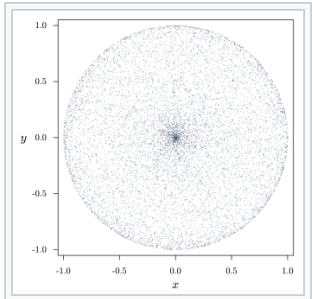


www.wikipedia.de

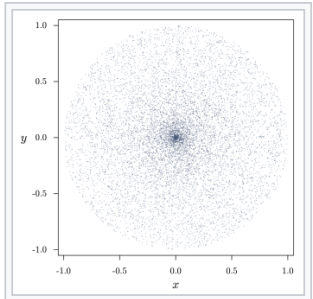
Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1/4

Visualisierung der Auswahlmethoden

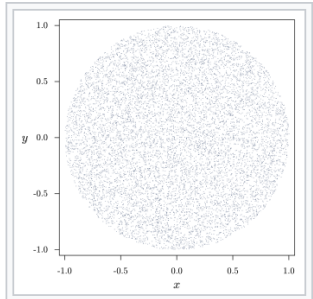
- Eine Sehne ist eindeutig durch ihren Mittelpunkt festgelegt.
- Jede der drei vorgestellten Methoden resultiert in einer anderen Verteilung von Mittelpunkten.



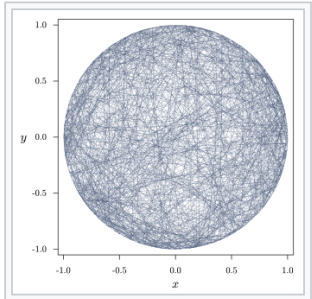
Mittelpunkte der nach Methode 1 zufällig gewählten Sehnen



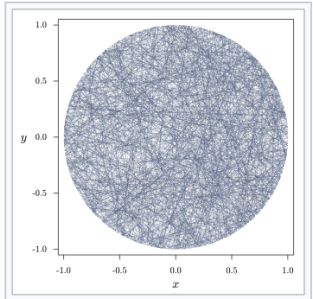
Mittelpunkte der nach Methode 2 zufällig gewählten Sehnen



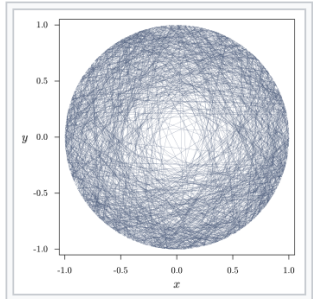
Mittelpunkte der nach Methode 3 zufällig gewählten Sehnen



Nach Methode 1 zufällig gewählte Sehnen



Nach Methode 2 zufällig gewählte Sehnen



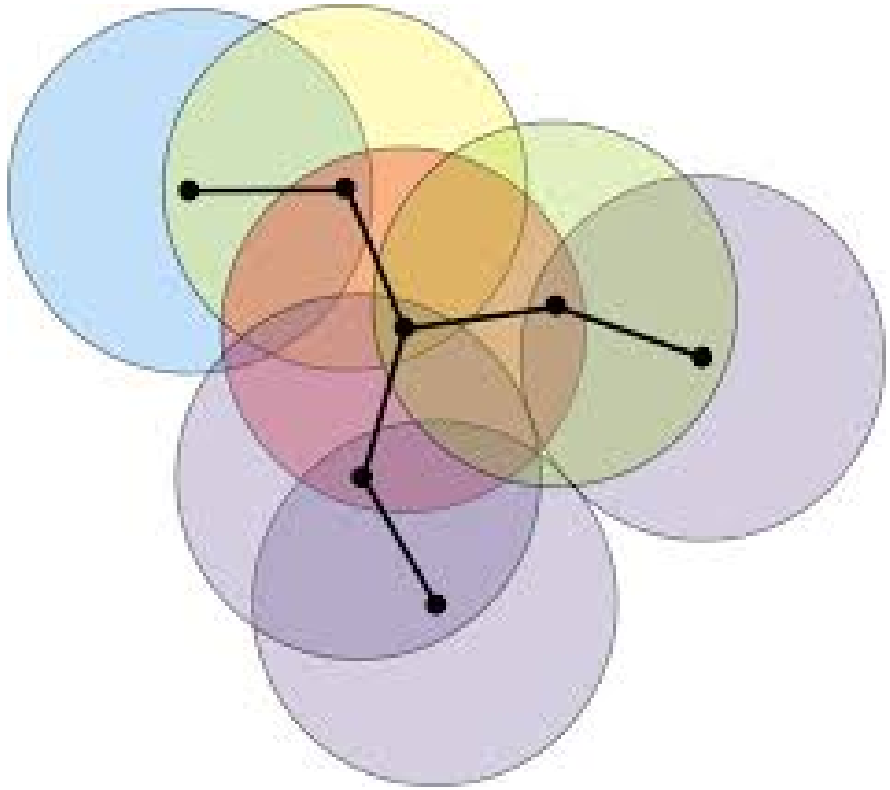
Nach Methode 3 zufällig gewählte Sehnen

www.wikipedia.de

Zurück zur Modellierung von IoT Systemen.

Wir studieren speziellere Netzwerke mit folgenden Eigenschaften:

- zufällige Verteilung von Netzwerkkomponenten im Raum
- statische Netzwerke - keine Zeitkomponente
- keine zusätzliche Infrastruktur

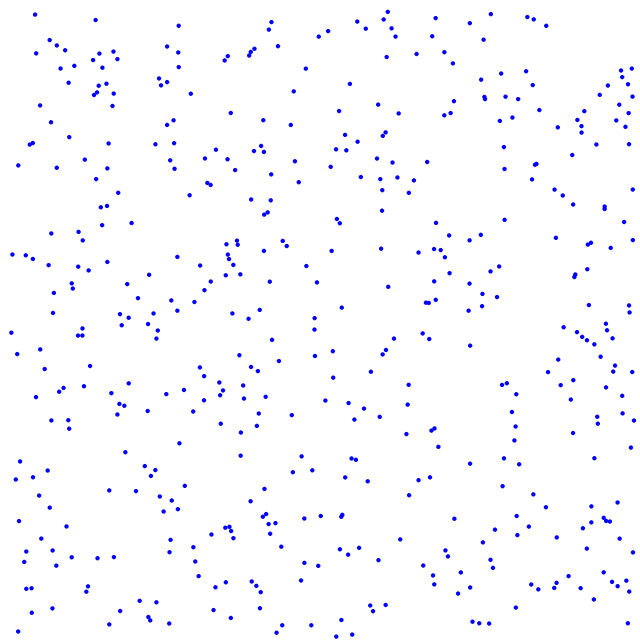


www.wikipedia.de

Poissonsche Punktprozesse

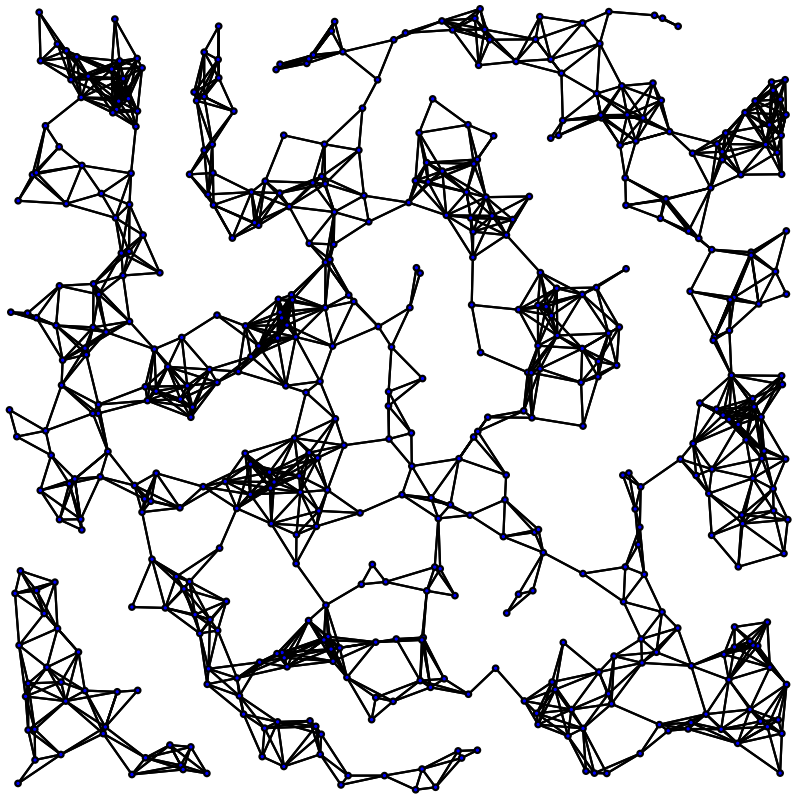
- Poissonsche Punktprozesse X sind zufällige sich nicht häufende Punktwolken (Konfigurationen von Netzwerk-Komponenten) mit folgenden Eigenschaften:
  1. Punktwolken in disjunkten Gebieten sind stochastisch unabhängig.
  2. Die Anzahl von Punkten in einem Gebiet $A \subset \mathbb{R}^d$ ist Poisson verteilt mit Parameter $\lambda \mathrm{Vol}(A)$:

$$\mathbb{P}_\lambda(X \text{ hat } k \text{ Punkte in } A) = e^{-\lambda \mathrm{Vol}(A)} \frac{(\lambda \mathrm{Vol}(A))^k}{k!}$$



Gilbert Graphen

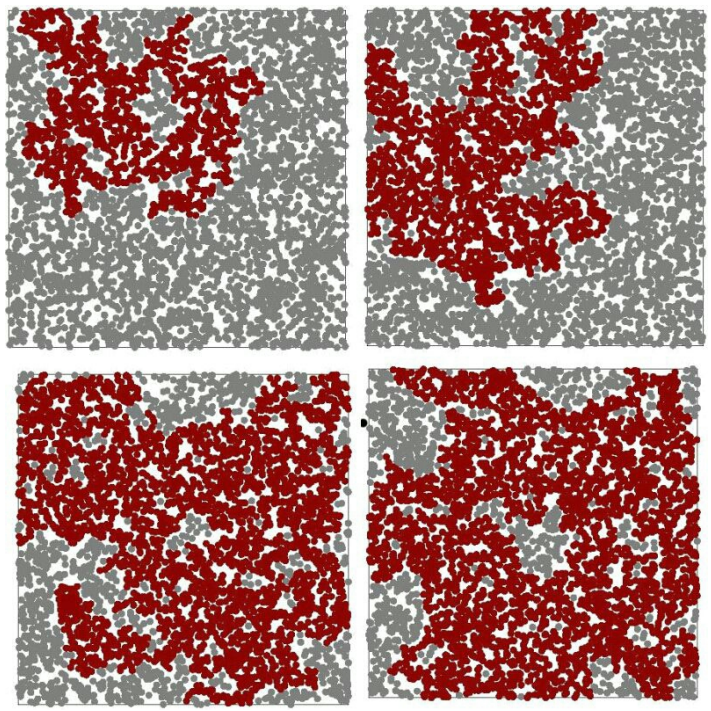
- Gilbert (1961): Erstes einfaches Netzwerk-Modell $G_r(X)$ welches auf dem Poissonschen Punktprozess X basiert.
- Zwei Netzwerk-Komponenten x, y können kommunizieren falls ihr Abstand kleiner ist als eine Zahl $r > 0$: $|x - y| < r$



Perkolation

- Bewertung der Netzwerk Konnektivität anhand der Größe von Clustern verbundener Komponenten.
- Existenz von unendlich großen Clustern wird Perkolation genannt.

$$\mathbb{P}_\lambda(G_r(X) \text{ perkoliert}) > 0$$



www.wikipedia.de

Phasenübergänge

- Perkolation ist ein Phasenübergangs-Phänomen im Intensitäts-Parameter λ.
- Es existiert ein $0 < \lambda_c < \infty$ mit der Eigenschaft

$$\lambda_c = \lambda_c(r) = \inf\{\lambda : \mathbb{P}(G_r(X) \text{ perkoliert}) > 0\}.$$

- Im sub-kritischen Regime $\lambda < \lambda_c$ gibt es nur lokale Kommunikation.
- Im super-kritischen Regime $\lambda > \lambda_c$ ist globale Kommunikation möglich.
- Es ist kein geschlossener Ausdruck für λ_c als Funktion von r bekannt.
- Numerische Berechnungen haben ergeben $\lambda_c \approx 1.436$ für $r = 1$.

Eigenschaften der Perkolations-Cluster

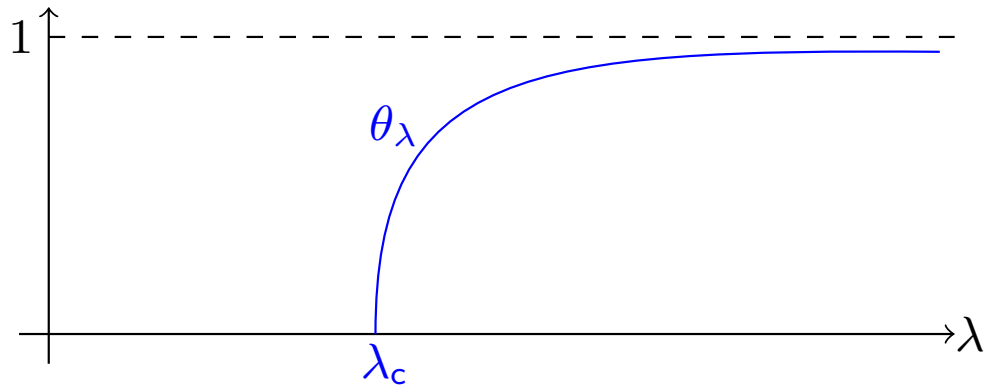
Eine Reihe von weiteren Eigenschaften von Perkolations-Clustern können bewiesen werden. Sei $C(o)$ der Cluster welcher den Koordinaten-Ursprung enthält.

- Exponenzielle Kleinheit der Cluster im sub-kritischen Regime,

$$\mathbb{P}(\#C(o) \geq s) \leq \exp(-c's)$$

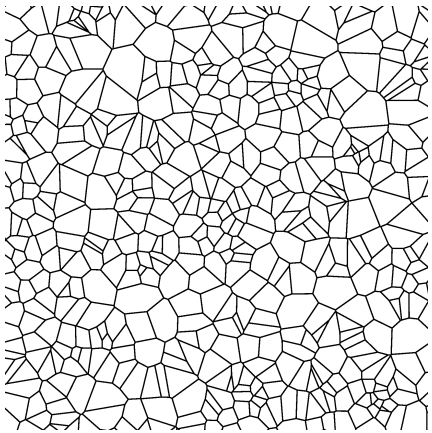
- Eindeutigkeit des unendliche Cluster im super-kritischen Regime
- Im super-kritischen Regime $\lambda > \lambda_c$ ist die Perkolations-Wahrscheinlichkeit θ_λ, dass der Koordinaten-Ursprung im unendlichen Cluster enthalten ist, echt positiv,

$$\theta_\lambda = \mathbb{P}(\#C(o) = \infty) > 0$$

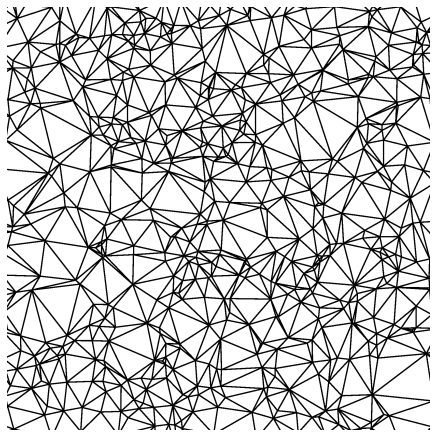


Poisson Tesselationen

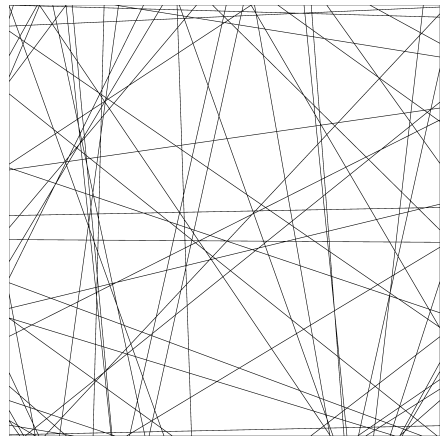
Auf der Basis von Poissonschen Punkt Prozessen können eine Vielzahl von Kachelungen definiert werden.



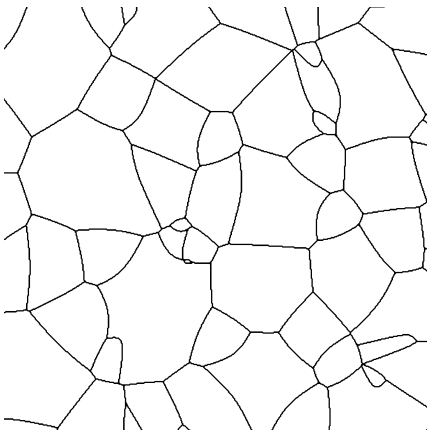
Voronoi Tessellation



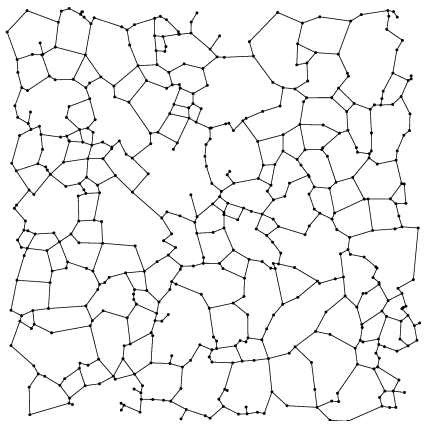
Delaunay Tessellation



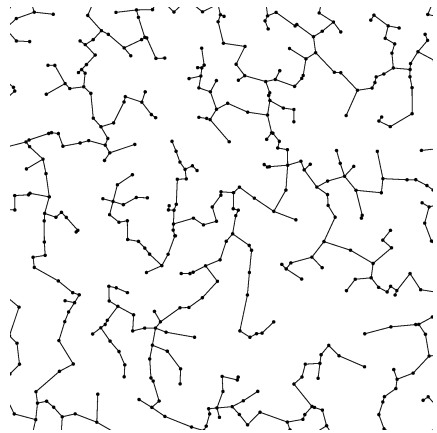
Line Tessellation



Johnson-Mehl Tessellation



Relative neighborhood graph



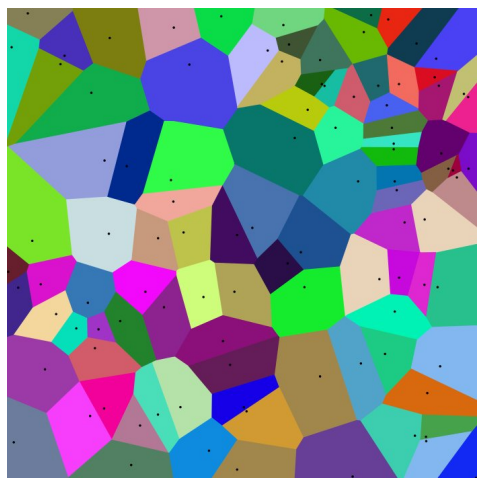
Minimum spanning forest

Poisson-Voronoi Tesselationen

- Auch bekannt unter den Namen: Voronoi Diagramm, Voronoi Decomposition, Voronoi Partition, Dirichlet Tessellation oder Thiessen Polygone
- Eine formale Definition: Die Voronoi-Zelle zum Punkt $x \in X$ is gegeben durch

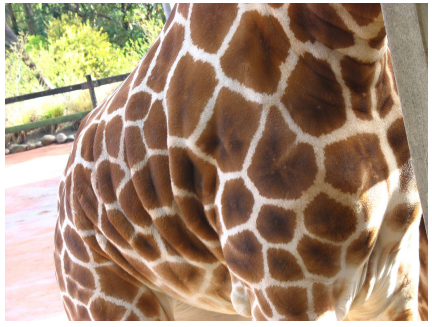
$$Z(x) = \{z \in \mathbb{R}^d : |z - x| < |z - y| \text{ für alle } y \in X \setminus \{x\}\}.$$

- Findet Anwendung in vielen Bereichen der Wissenschaft (Algorithmischen Geometrie, Materialwissenschaften) und Praxis (Biologie, Chemie, Meteorologie, Kristallographie, Architektur).



www.wikipedia.de

Poisson-Voronoi Tesselationen



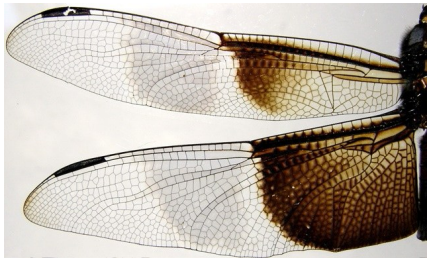
Giraffenhaut

Schlammstruktur

Feldstruktur

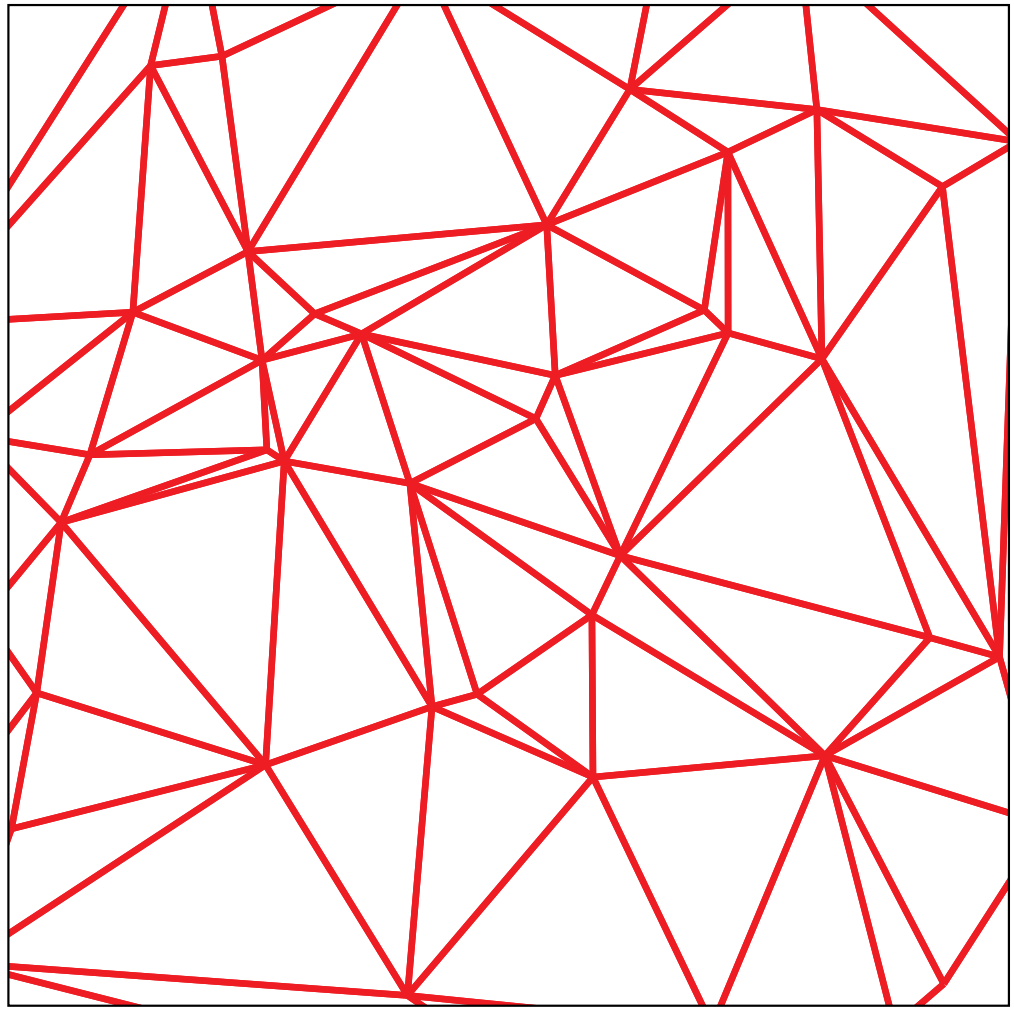
Architektur: Airspace Tokyo

Design

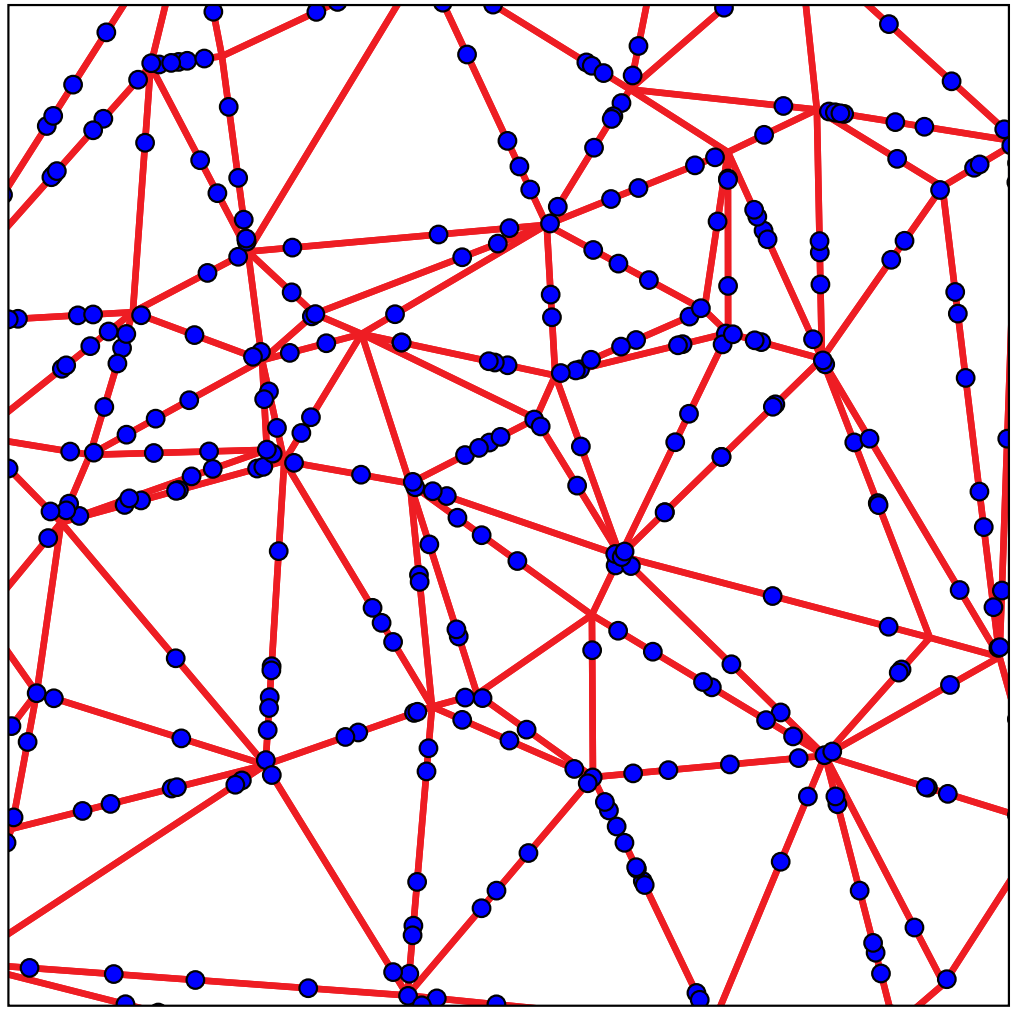


Libellenflügel

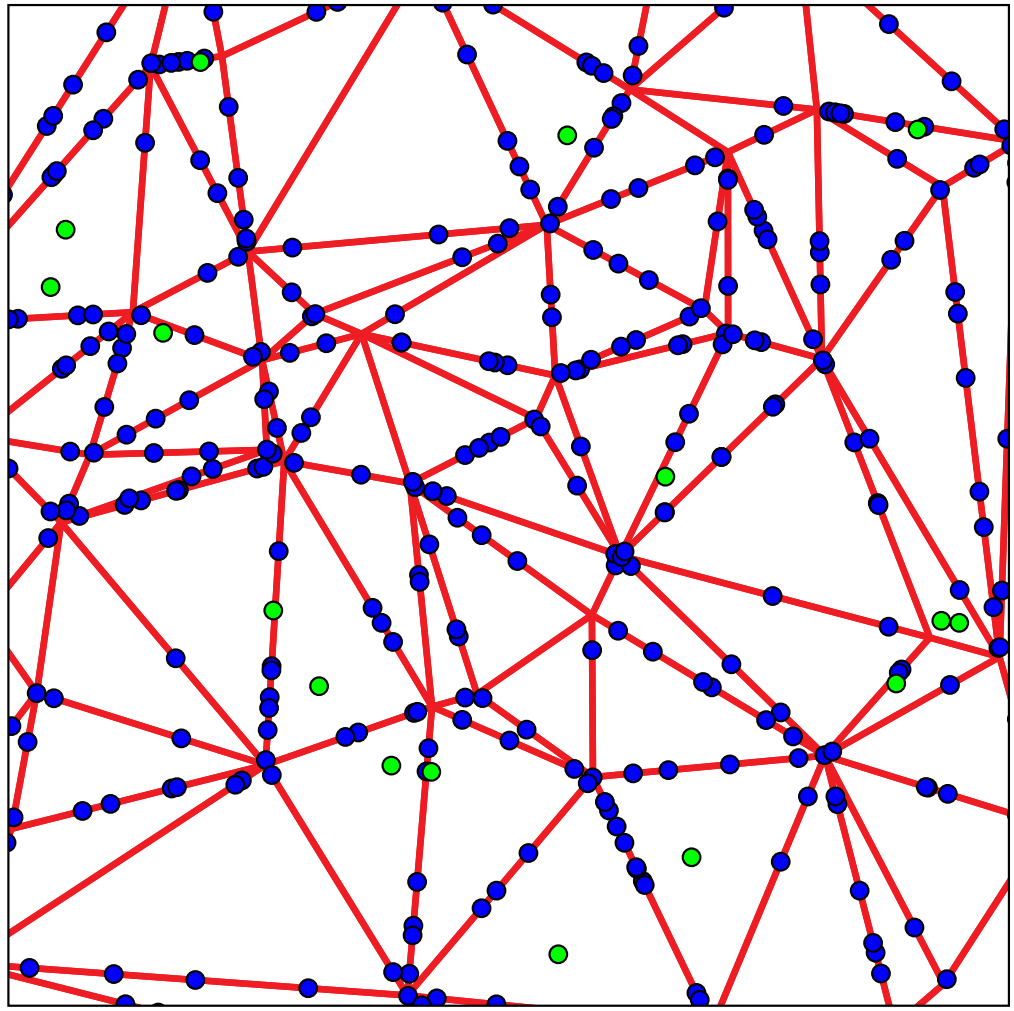
Poisson Tesselationen für urbane Netzwerke



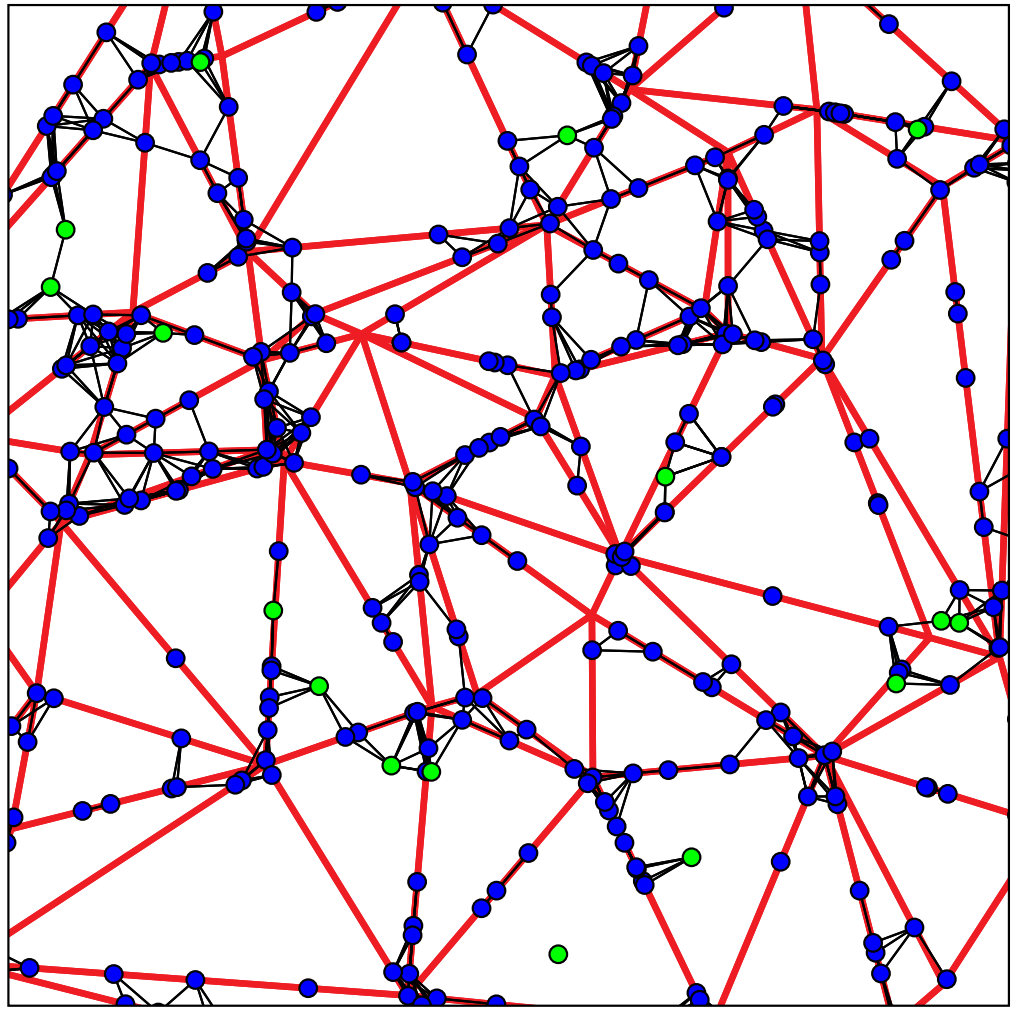
Poisson Tesselationen für urbane Netzwerke



Poisson Tesselationen für urbane Netzwerke



Poisson Tesselationen für urbane Netzwerke



Fundamentale Netzwerk-Charakteristiken

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gegebene Orte verbunden sind in Abhängigkeit vom Abstand der Orte?

$$p_s = \mathbb{P}(o \leftrightsquigarrow se_1)?$$

2. Wie hoch ist der Anteil an verbundenen Paaren von Komponenten?

$$\pi_s = \mathbb{E}(\#(X \leftrightsquigarrow Y) \in B_s(o))?$$

3. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gegebene Orte verbunden sind, wenn die Anzahl der Hops beschränkt wird?

$$\hat{p}_s = \mathbb{P}(o \leftrightsquigarrow se_1 | \# \text{ Hops} < \alpha s)?$$

Fundamentale Netzwerk-Charakteristiken: Mathematische Antworten

Die mathematisch streng bewiesenen Antworten sind oftmals nur asymptotisch, d.h. für Grenzwerte von Parametern. Zur Erinnerung $\theta = \mathbb{P}(\#C(o) = \infty)$.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gegebene Orte verbunden sind in Abhängigkeit vom Abstand der Orte?

$$\lim_{s \uparrow \infty} p_s = \theta^2$$

2. Wie hoch ist der Anteil an verbundenen Paaren von Komponenten?

$$\lim_{s \uparrow \infty} \pi_s = \theta^2$$

3. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gegebene Orte verbunden sind, wenn die Anzahl der Hops beschränkt wird?

$$\lim_{s \uparrow \infty} \hat{p}_s = \theta^2 \mathbb{1}_{\alpha \geq \mu}$$

Eigenschaften von θ

Es existiert keine geschlossene Formel für $\theta = \theta(\text{Strassen, Nutzern}) = \theta(\gamma, \lambda)$. Wir müssen erneut asymptotische Analysen anstellen.

- Universalität in der Nähe der kritischen Komponenten Intensität

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_c} \frac{\log \theta(\gamma, \lambda, \lambda')}{\log(\lambda - \lambda_c)} = \frac{5}{36}$$

- Grenzwert der dichten Komponenten

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \lambda^{-1} \log(1 - \theta(\gamma, \lambda, \lambda')) = -2r$$

- Grenzwert der dichten Strassen

$$\lim_{\gamma \uparrow \infty} \gamma^{-1} \log(1 - \theta(\gamma, \lambda, \lambda')) = -r^2 \pi \lambda$$

Vielen Dank.