Weierstrass Institute for
Applied Analysis and Stochastics

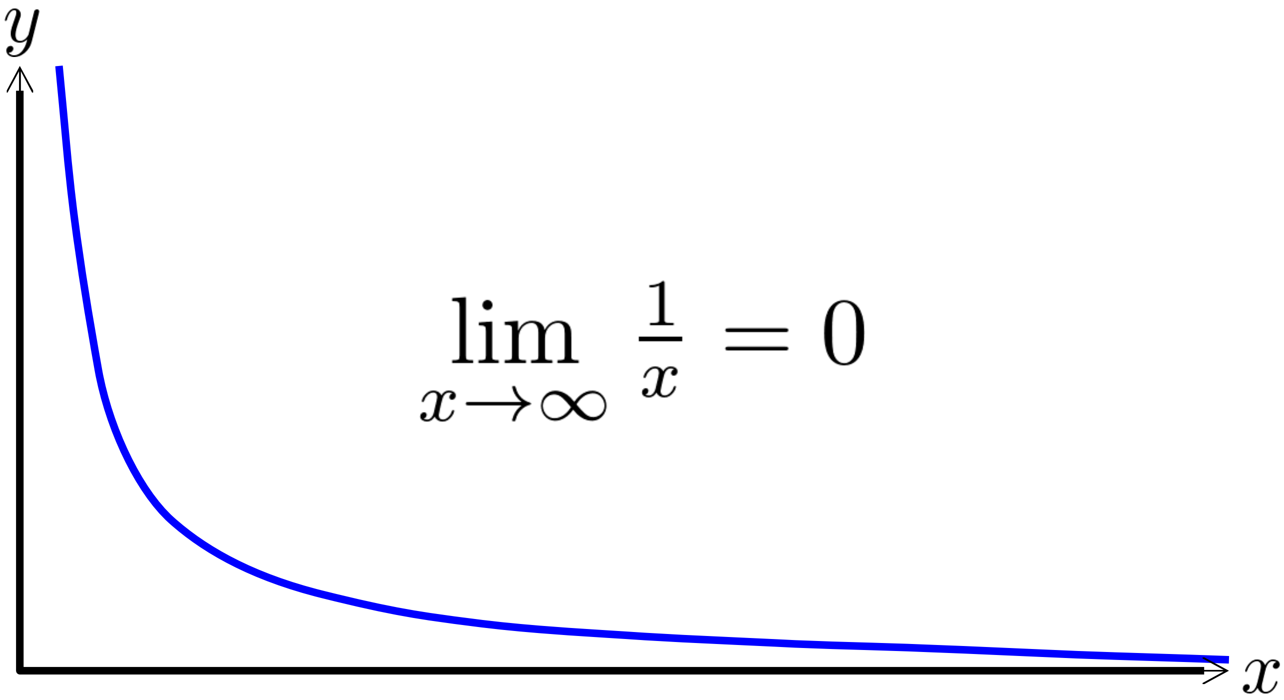
Leibniz Association

Unendlichkeit

$$\infty$$

Michiel Renger

Gegen unendlich gehen

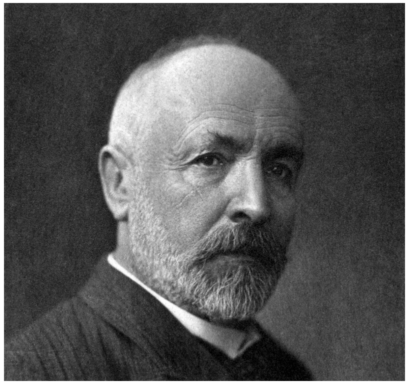


$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

➡ Unendlichkeit ≈ Zahl

➡ Zahl ≈ Anzahl

➡ Anzahl ≈ Eigenschaft einer Menge



Georg Cantor
(1845-1918)

Annahme 1. *Es gibt unendliche Mengen.*

➡ Wie zählt man eine unendliche Menge?

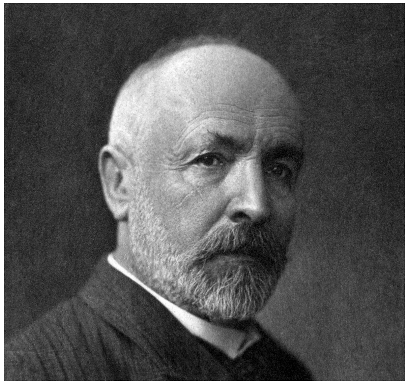
Annahme 2. *Zwei Mengen sind gleich groß wenn man zu jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zuweisen kann.*

Unendlichen Zahlen

➡ Unendlichkeit ≈ Zahl

➡ Zahl ≈ Anzahl

➡ Anzahl ≈ Eigenschaft einer Menge



Georg Cantor
(1845-1918)

Annahme 1. *Es gibt unendliche Mengen.*

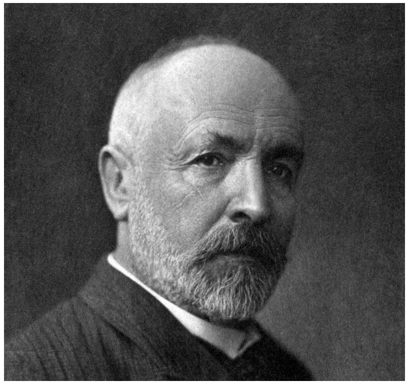
➡ Wie zählt man eine unendliche Menge?

Annahme 2. *Zwei Mengen sind gleich groß wenn: man zu jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zuweisen kann.*

➡ Unendlichkeit ≈ Zahl

➡ Zahl ≈ Anzahl

➡ Anzahl ≈ Eigenschaft einer Menge



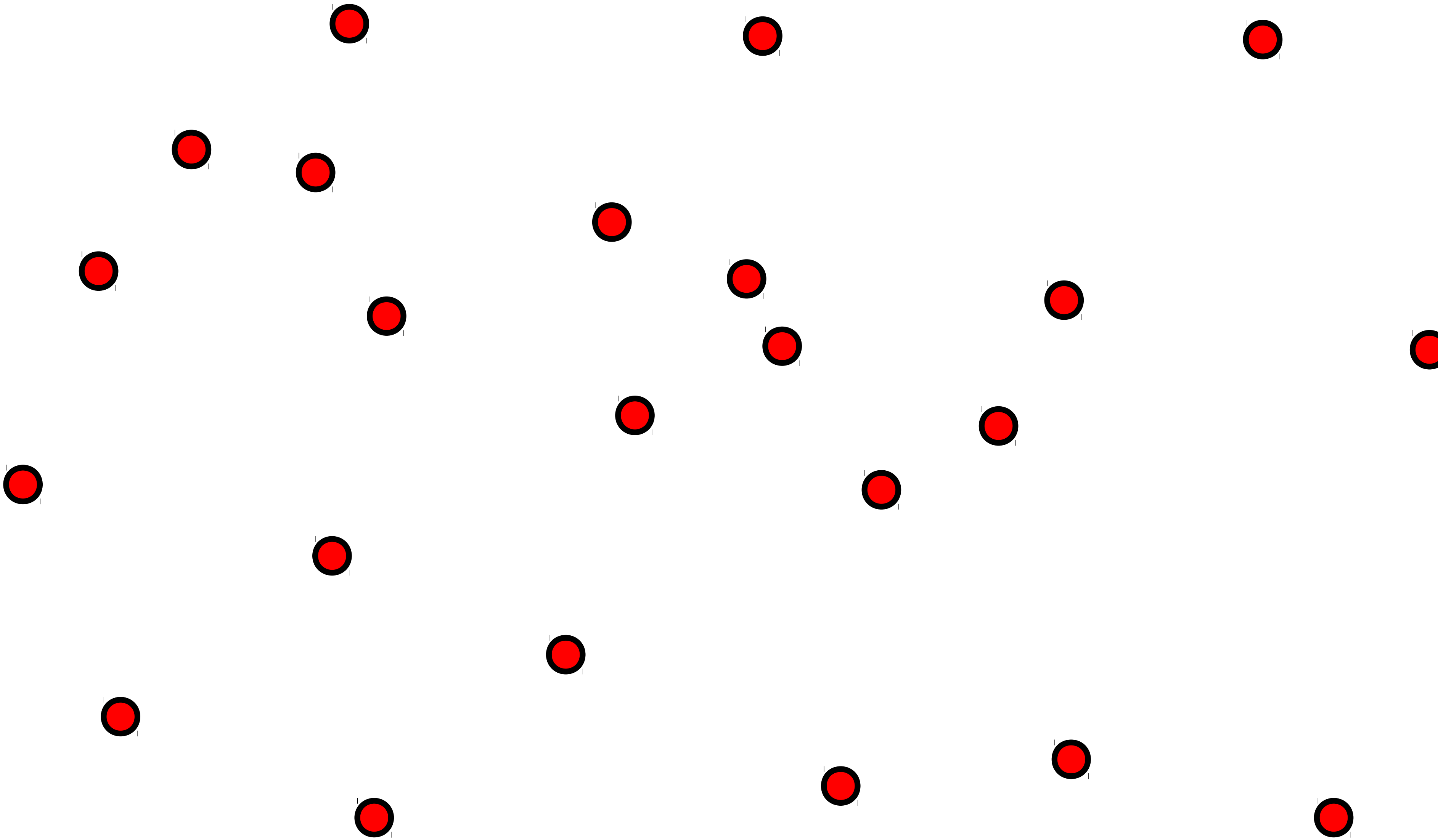
Georg Cantor
(1845-1918)

Annahme 1. *Es gibt unendliche Mengen.*

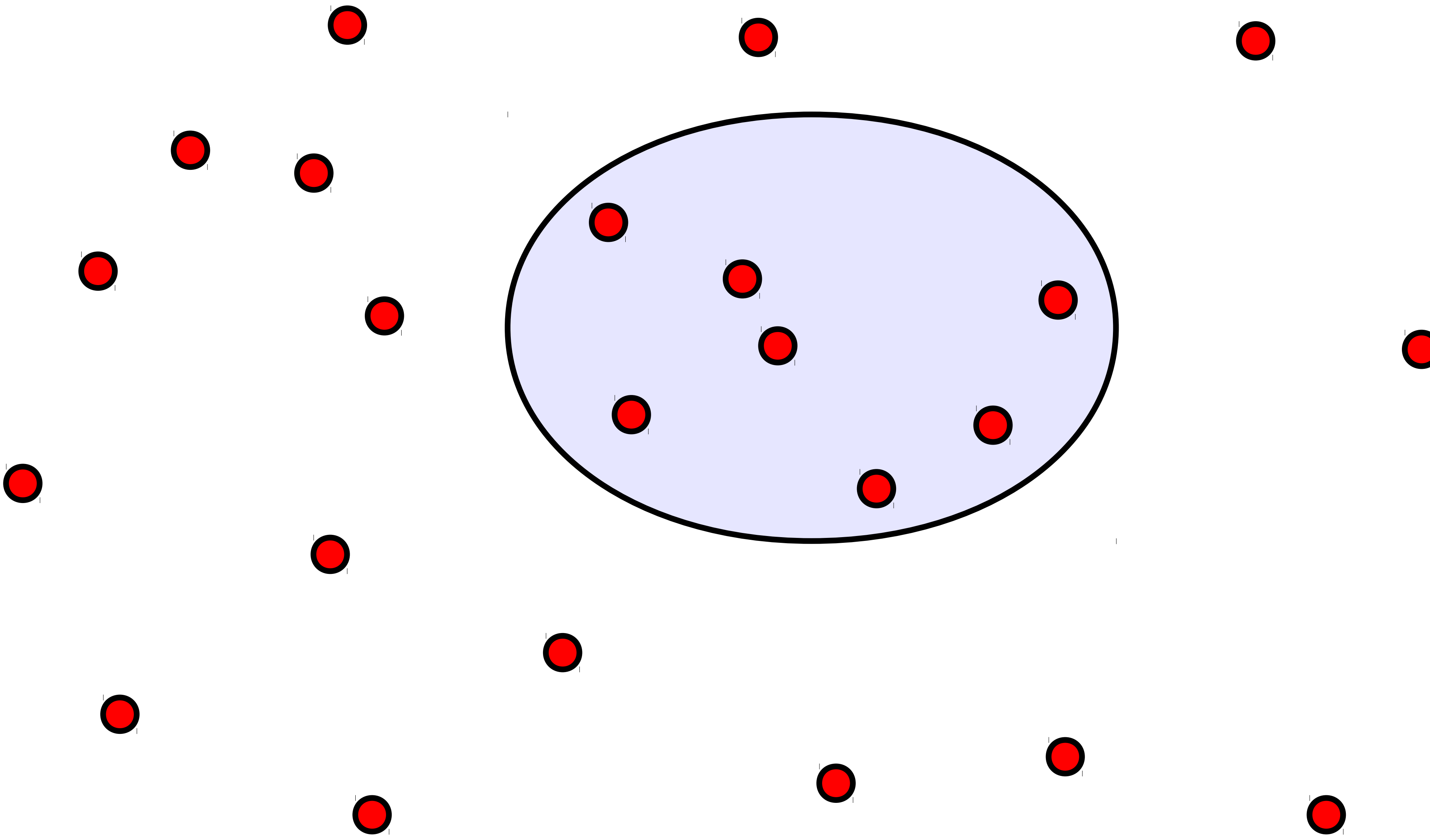
➡ Wie zählt man eine unendliche Menge?

Annahme 2. *Zwei Mengen sind gleich groß wenn: man zu jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zuweisen kann.*

Unendlichen Zahlen



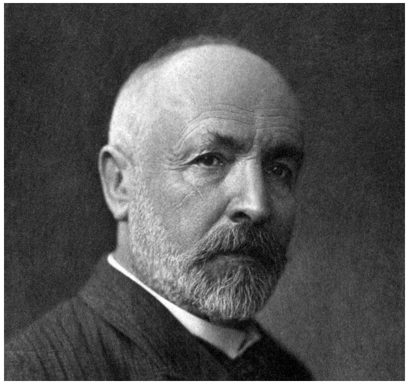
Unendlichen Zahlen



➡ Unendlichkeit ≈ Zahl

➡ Zahl ≈ Anzahl

➡ Anzahl ≈ Eigenschaft einer Menge


Georg Cantor
(1845-1918)

Annahme 1. *Es gibt unendliche Mengen.*

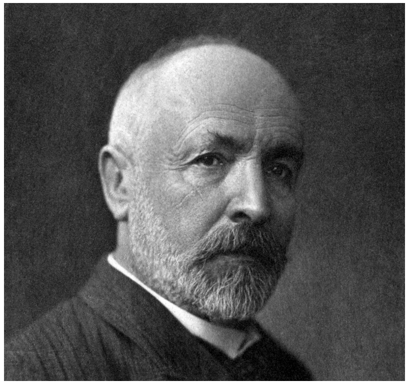
➡ Wie zählt man eine unendliche Menge?

Annahme 2. *Zwei Mengen sind gleich groß wenn: man zu jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zuweisen kann.*

➡ Unendlichkeit ≈ Zahl

➡ Zahl ≈ Anzahl

➡ Anzahl ≈ Eigenschaft einer Menge



Georg Cantor
(1845-1918)

Annahme 1. *Es gibt unendliche Mengen.*

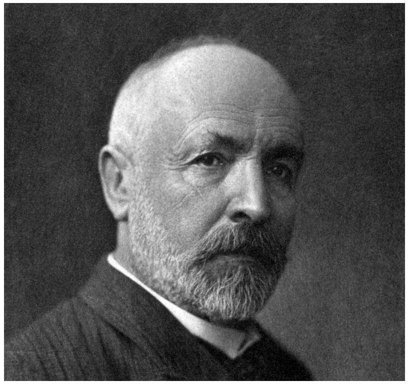
➡ Wie zählt man eine unendliche Menge?

Annahme 2. *Zwei Mengen sind gleich groß wenn: man zu jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zuweisen kann.*

➡ Unendlichkeit ≈ Zahl

➡ Zahl ≈ Anzahl

➡ Anzahl ≈ Eigenschaft einer Menge



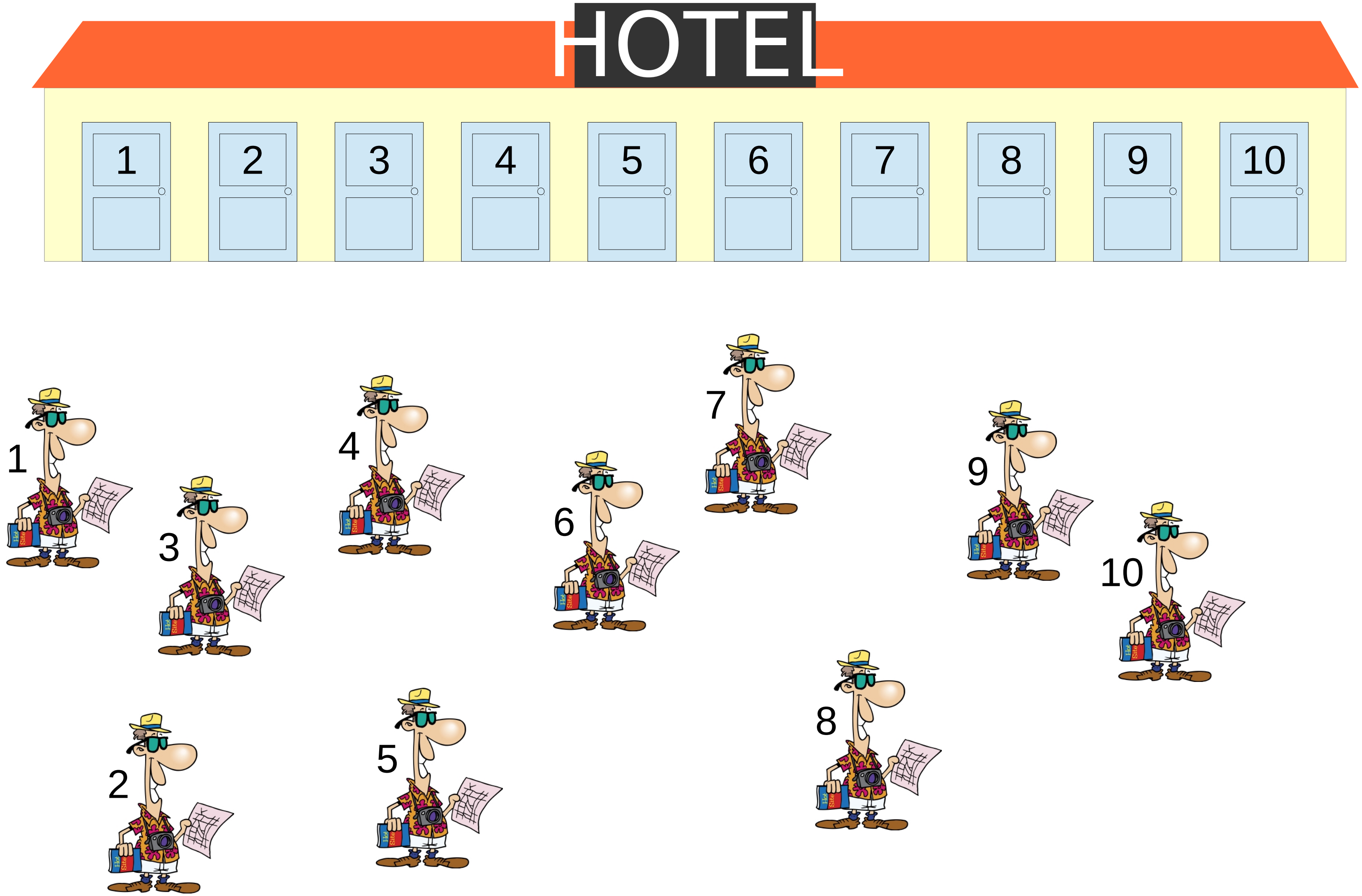
Georg Cantor
(1845-1918)

Annahme 1. *Es gibt unendliche Mengen.*

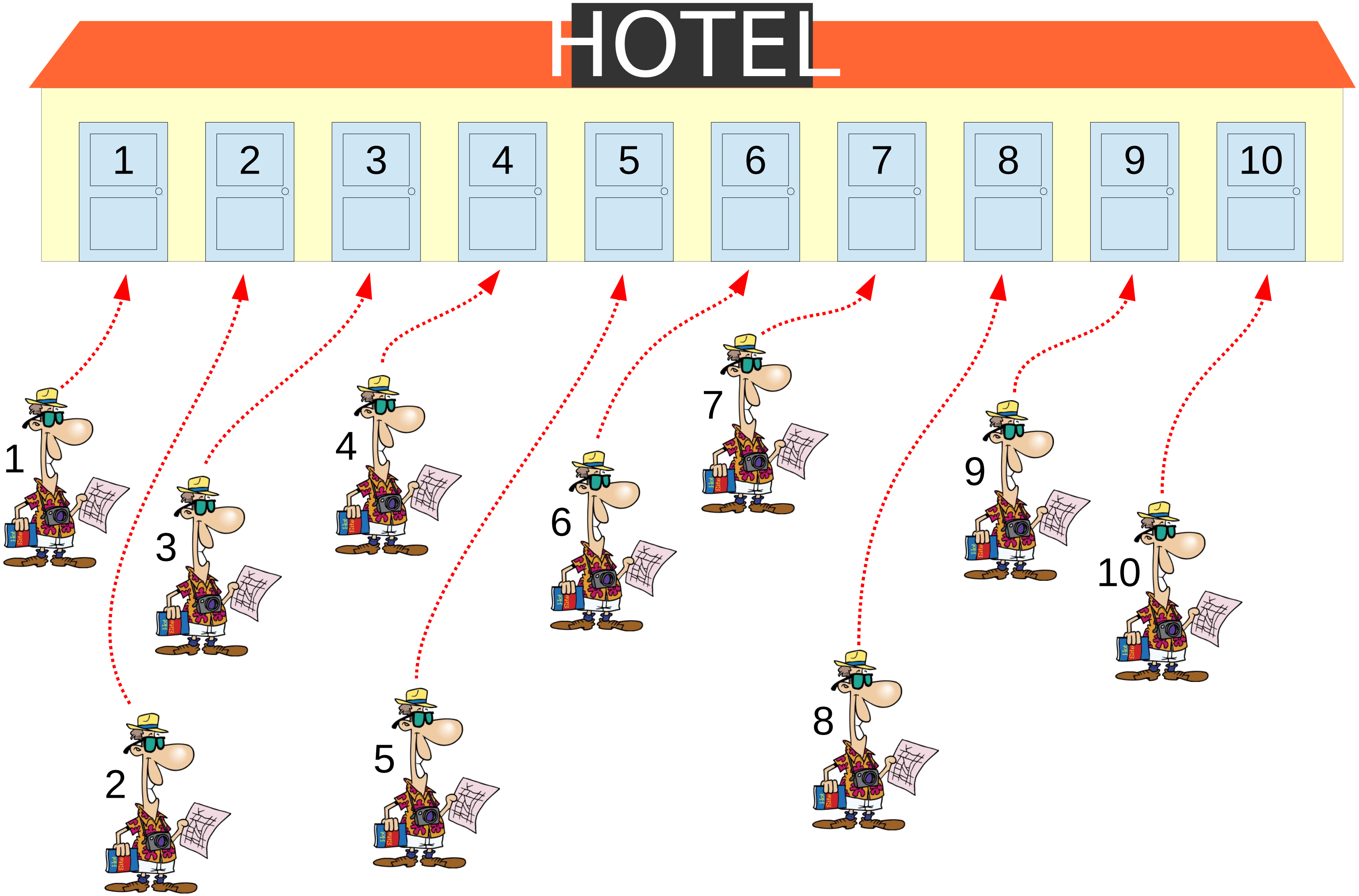
➡ Wie zählt man eine unendliche Menge?

Annahme 2. *Zwei Mengen sind gleich groß wenn: man zu jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zuweisen kann.*

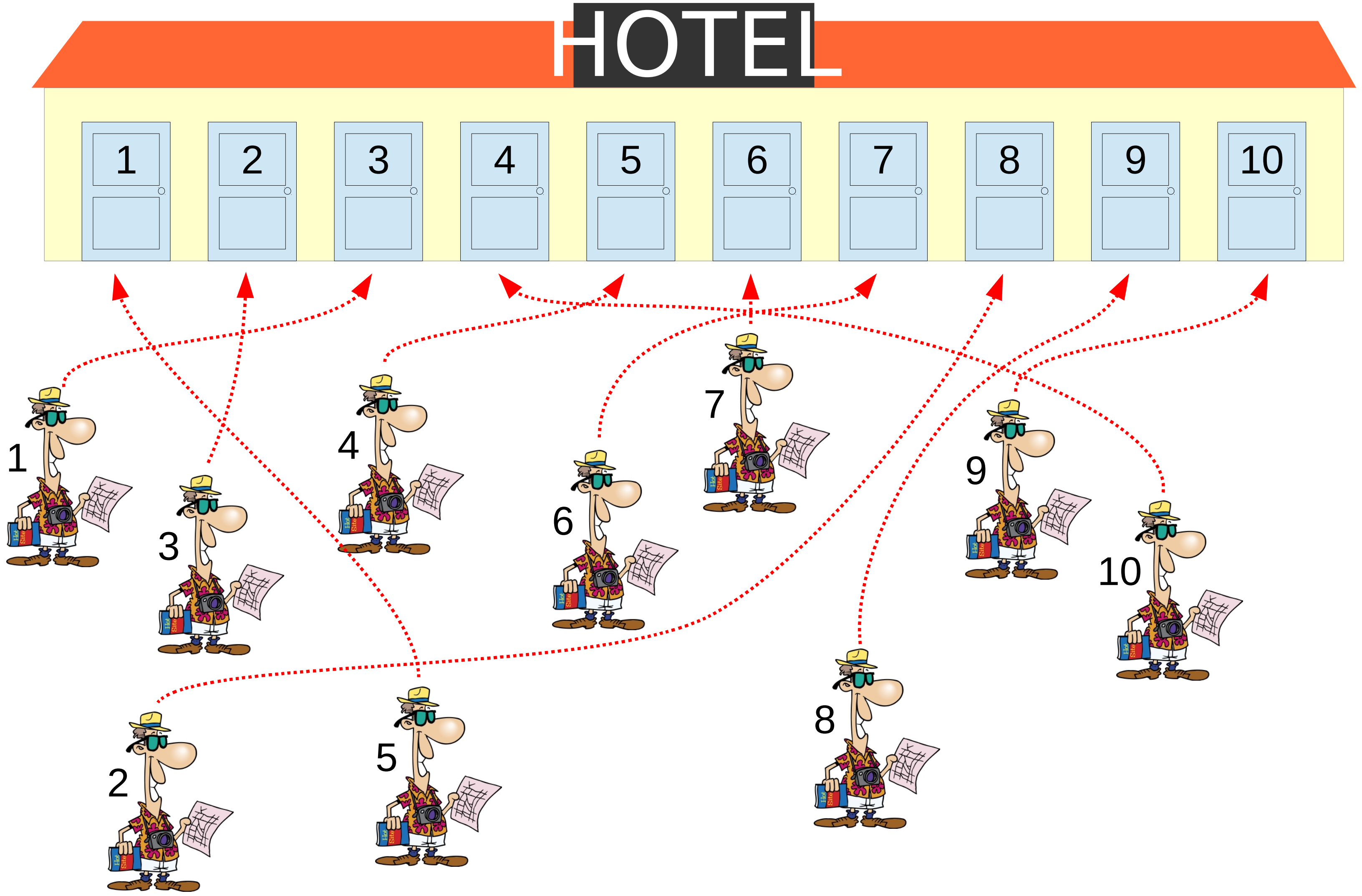
Gleich große Mengen



Gleich große Mengen



Gleich große Mengen



$$\aleph_0 := \#\{1, 2, 3, \ldots\} = \text{Anzahl natürlicher Zahlen}$$

1. $\aleph_0 + 1 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

2. $2 \times \aleph_0 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

3. $(\aleph_0)^2 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

4. $2^{\aleph_0} = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

5. Wie viel unendliche Zahlen gibt es?

(A) 1 (B) Mehr (C) Viel viel mehr

$$\aleph_0 := \#\{1, 2, 3, \ldots\} = \text{Anzahl natürlicher Zahlen}$$

1. $\aleph_0 + 1 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

2. $2 \times \aleph_0 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

3. $(\aleph_0)^2 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

4. $2^{\aleph_0} = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

5. Wie viel unendliche Zahlen gibt es?

(A) 1 (B) Mehr (C) Viel viel mehr

$$\aleph_0 := \#\{1, 2, 3, \ldots\} = \text{Anzahl natürlicher Zahlen}$$

1. $\aleph_0 + 1 = ?$ — A $\aleph_0$ — B $> \aleph_0$

2. $2 \times \aleph_0 = ?$ — A $\aleph_0$ — B $> \aleph_0$

3. $(\aleph_0)^2 = ?$ — A $\aleph_0$ — B $> \aleph_0$

4. $2^{\aleph_0} = ?$ — A $\aleph_0$ — B $> \aleph_0$

5. Wie viel unendliche Zahlen gibt es?

A 1 — B Mehr — C Viel viel mehr

$$\aleph_0 := \#\{1, 2, 3, \ldots\} = \text{Anzahl natürlicher Zahlen}$$

1. $\aleph_0 + 1 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

2. $2 \times \aleph_0 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

3. $(\aleph_0)^2 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

4. $2^{\aleph_0} = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

5. Wie viel unendliche Zahlen gibt es?

(A) 1 (B) Mehr (C) Viel viel mehr

$$\aleph_0 := \#\{1, 2, 3, \ldots\} = \text{Anzahl natürlicher Zahlen}$$

1. $\aleph_0 + 1 = ?$ Ⓐ $\aleph_0$ Ⓑ $> \aleph_0$

2. $2 \times \aleph_0 = ?$ Ⓐ $\aleph_0$ Ⓑ $> \aleph_0$

3. $(\aleph_0)^2 = ?$ Ⓐ $\aleph_0$ Ⓑ $> \aleph_0$

4. $2^{\aleph_0} = ?$ Ⓐ $\aleph_0$ Ⓑ $> \aleph_0$

5. Wie viel unendliche Zahlen gibt es?

   Ⓐ 1 Ⓑ Mehr Ⓒ Viel viel mehr

$$\aleph_0 := \#\{1,2,3,\ldots\} = \text{Anzahl natürlicher Zahlen}$$

1. $\aleph_0 + 1 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

2. $2 \times \aleph_0 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

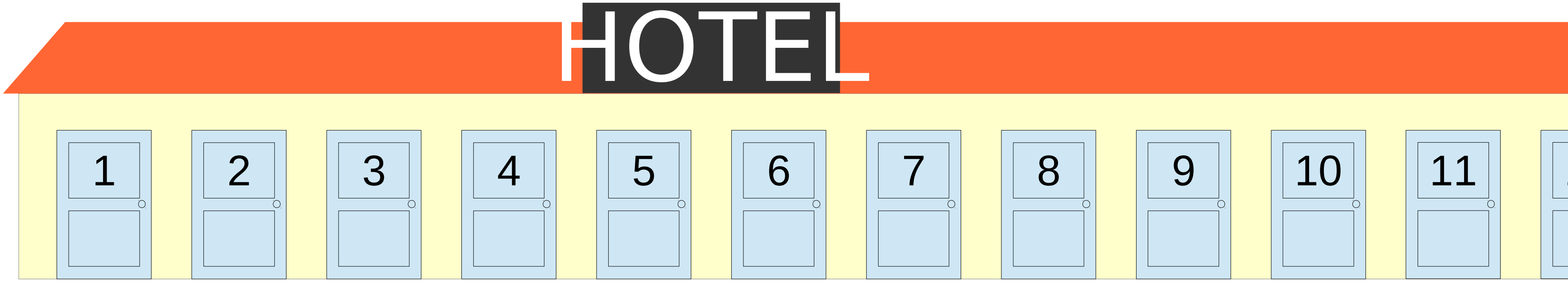
3. $(\aleph_0)^2 = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

4. $2^{\aleph_0} = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

5. Wie viele unendliche Zahlen gibt es?

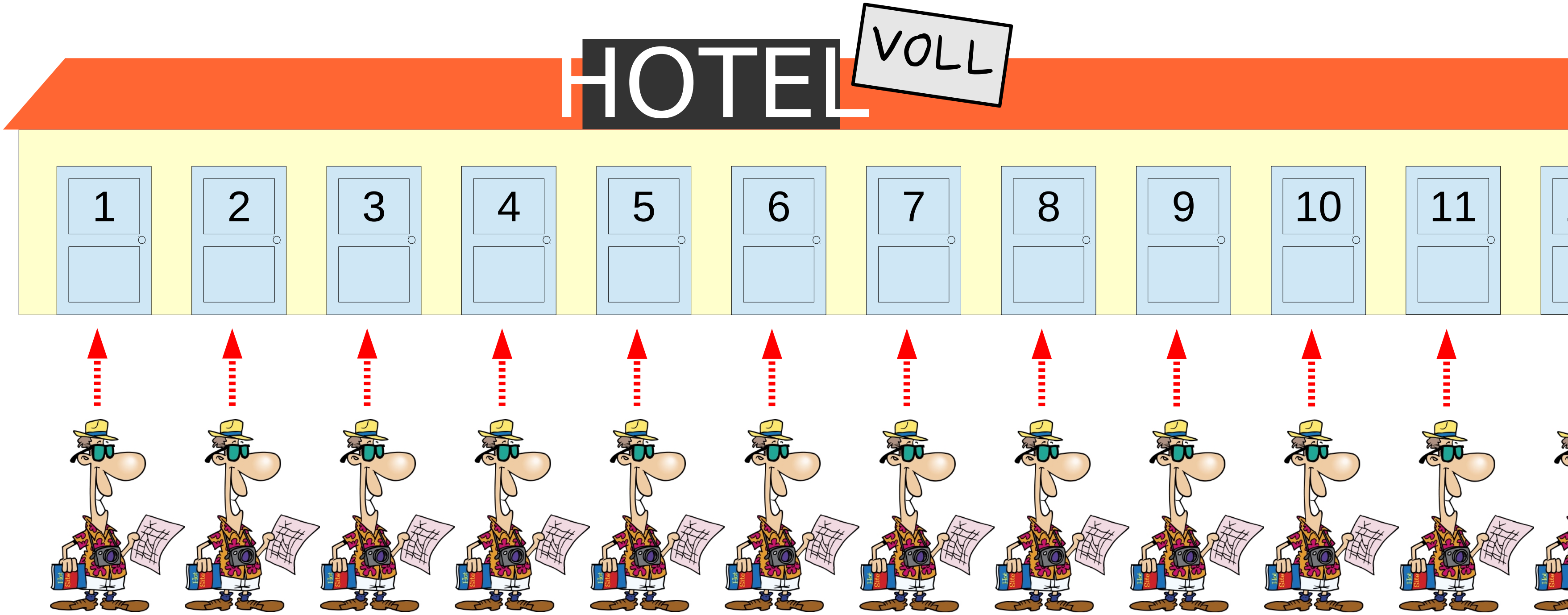
(A) 1 (B) Mehr (C) Viel viel mehr

Hilbert's Hotel

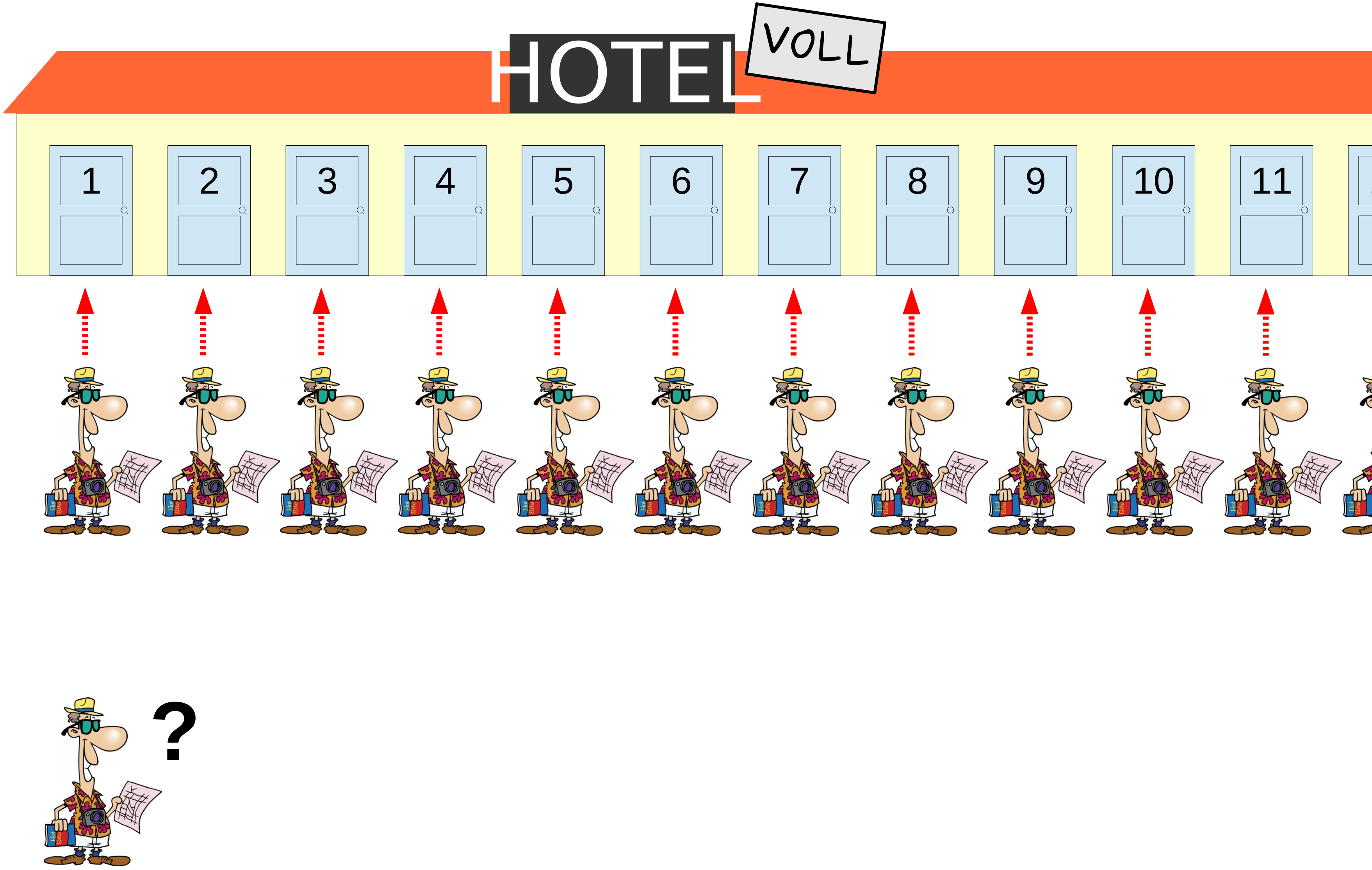


David Hilbert
(1862-1943)

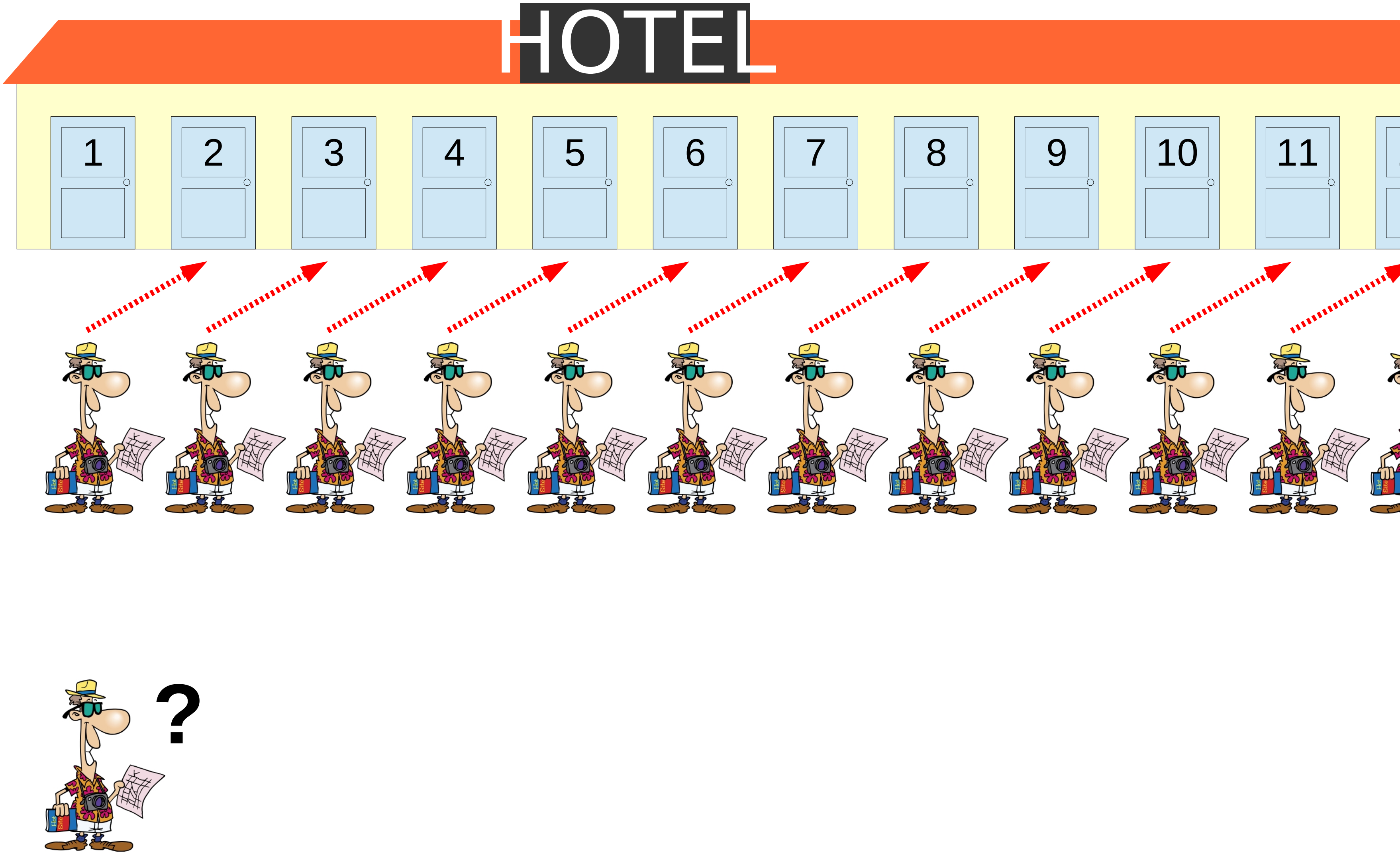
Hilbert's Hotel 1



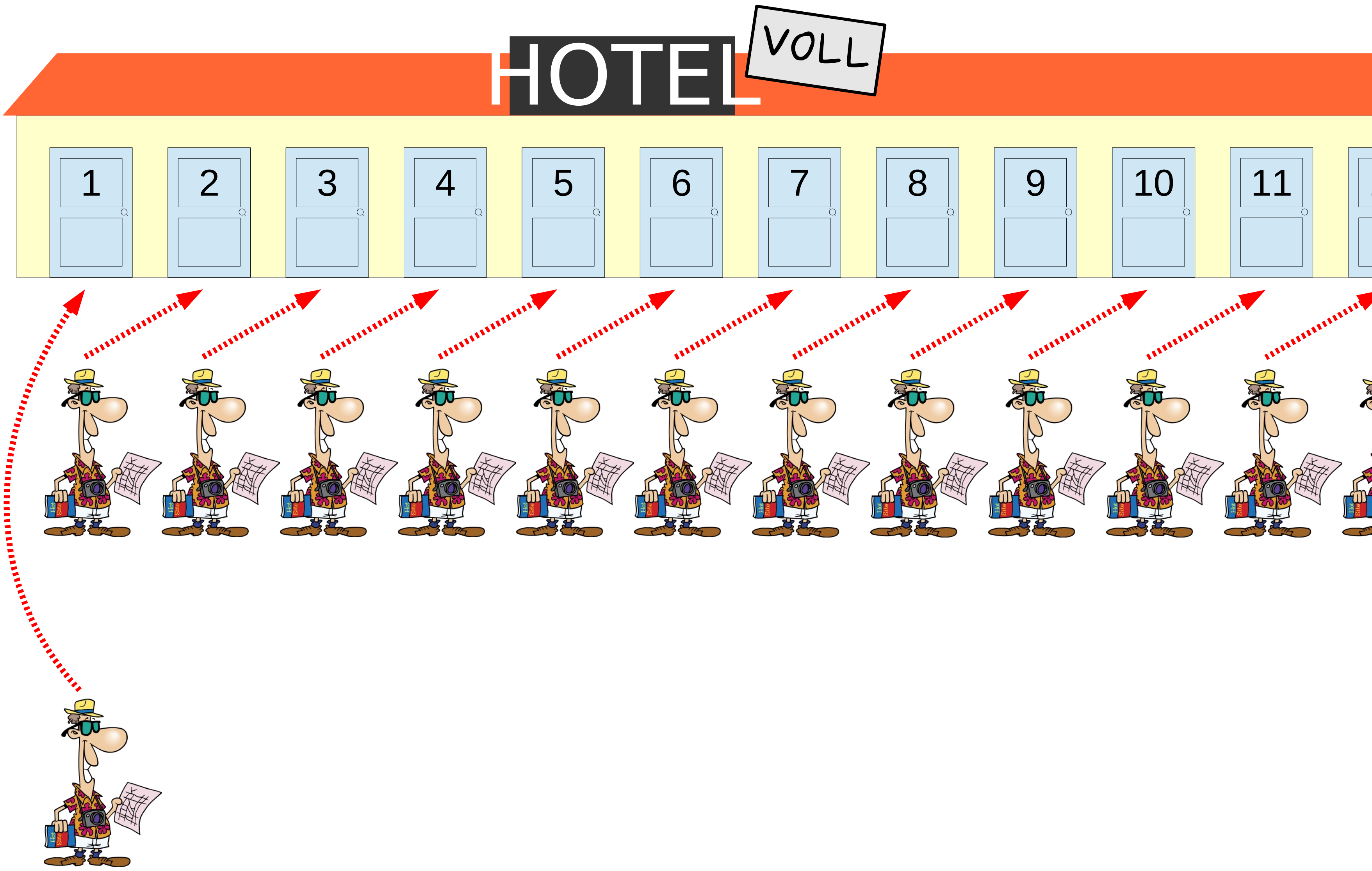
Hilbert's Hotel 1



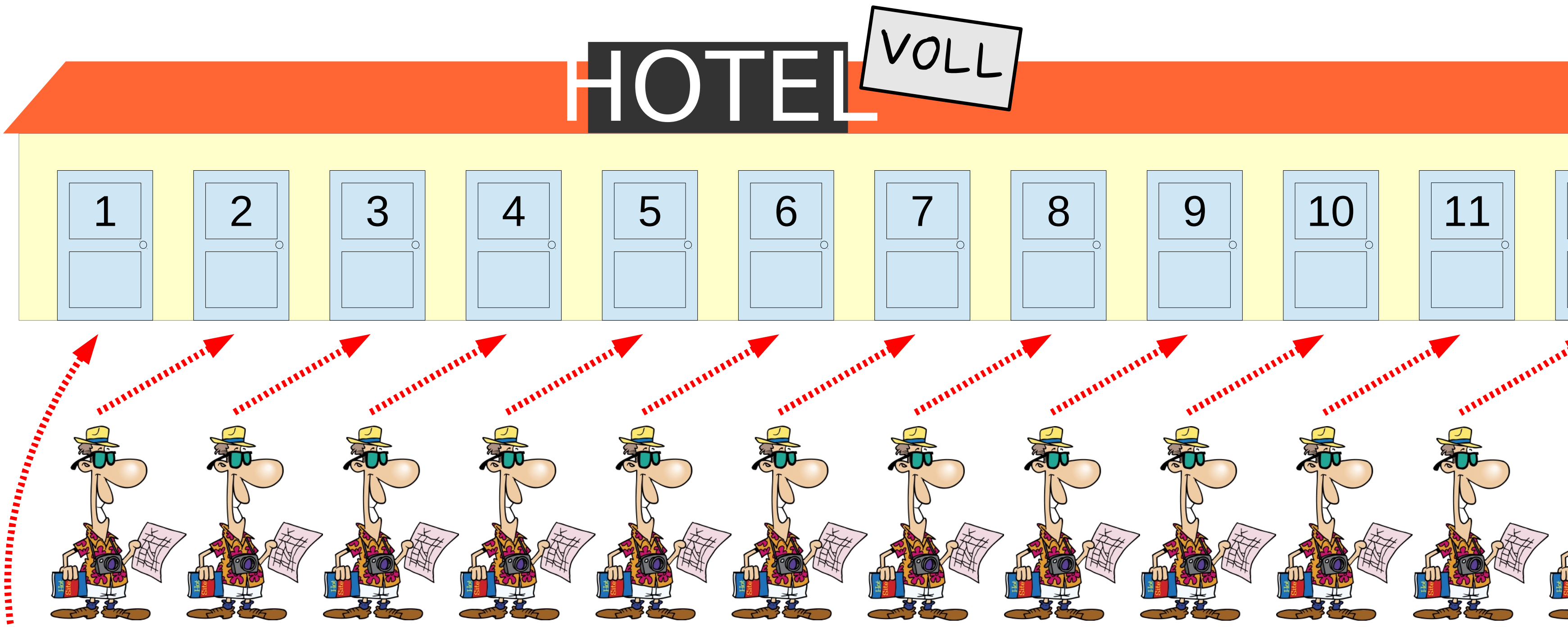
Hilbert's Hotel 1



Hilbert's Hotel 1



Hilbert's Hotel 1

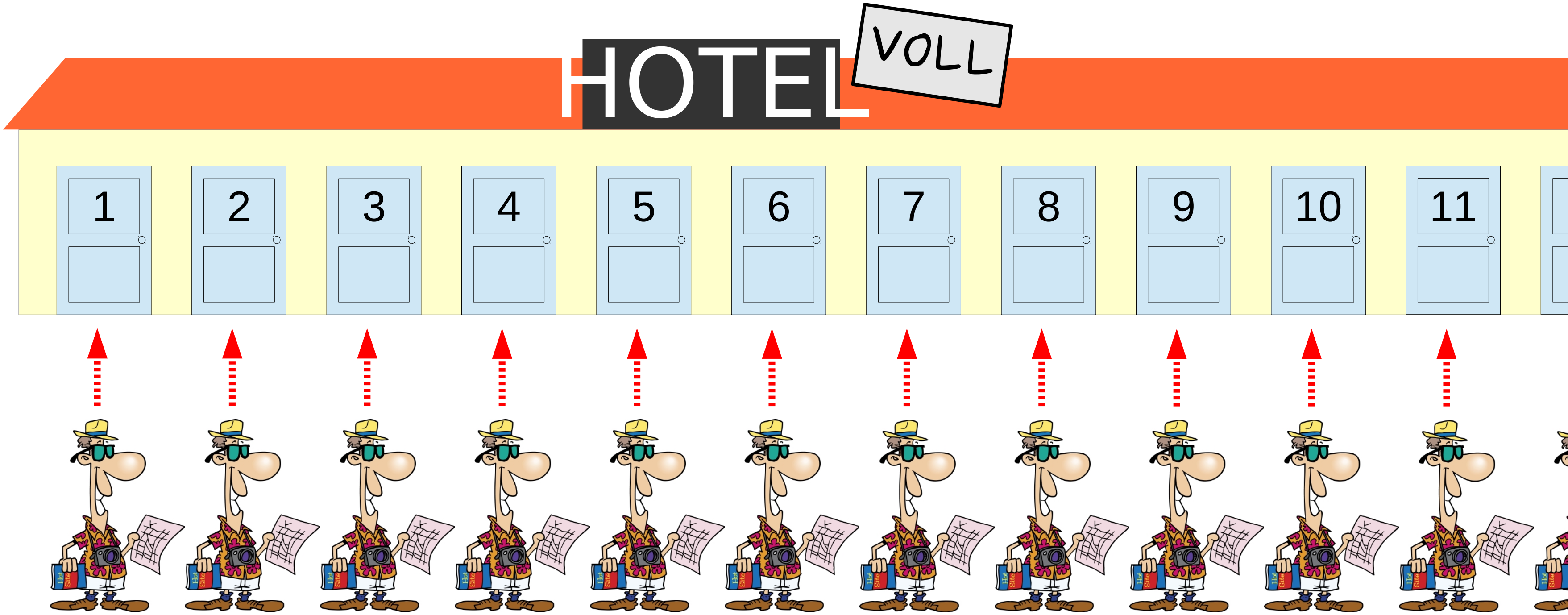


1. $\aleph_0 + 1 = ?$

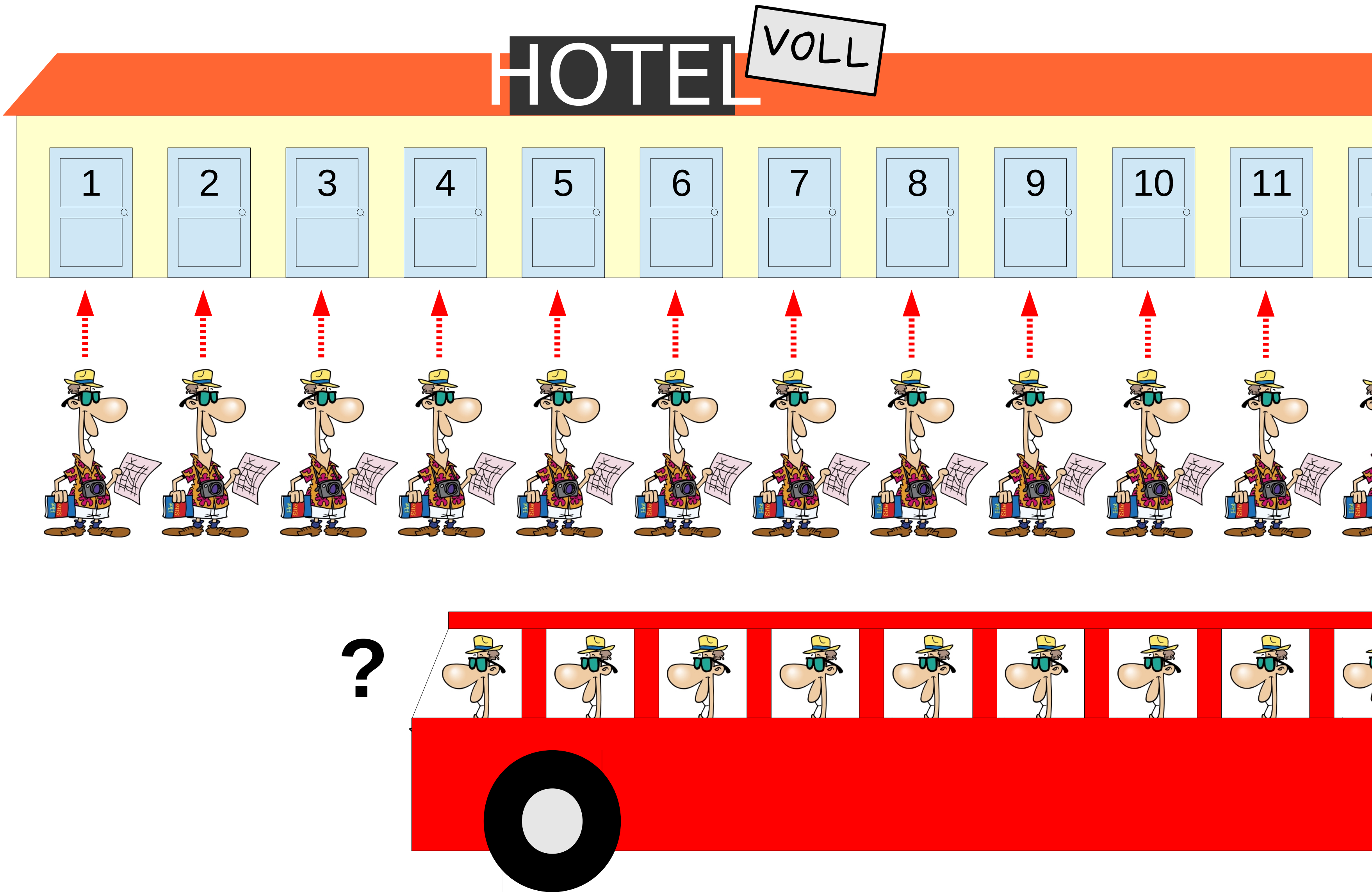
A $\aleph_0$

B $> \aleph_0$

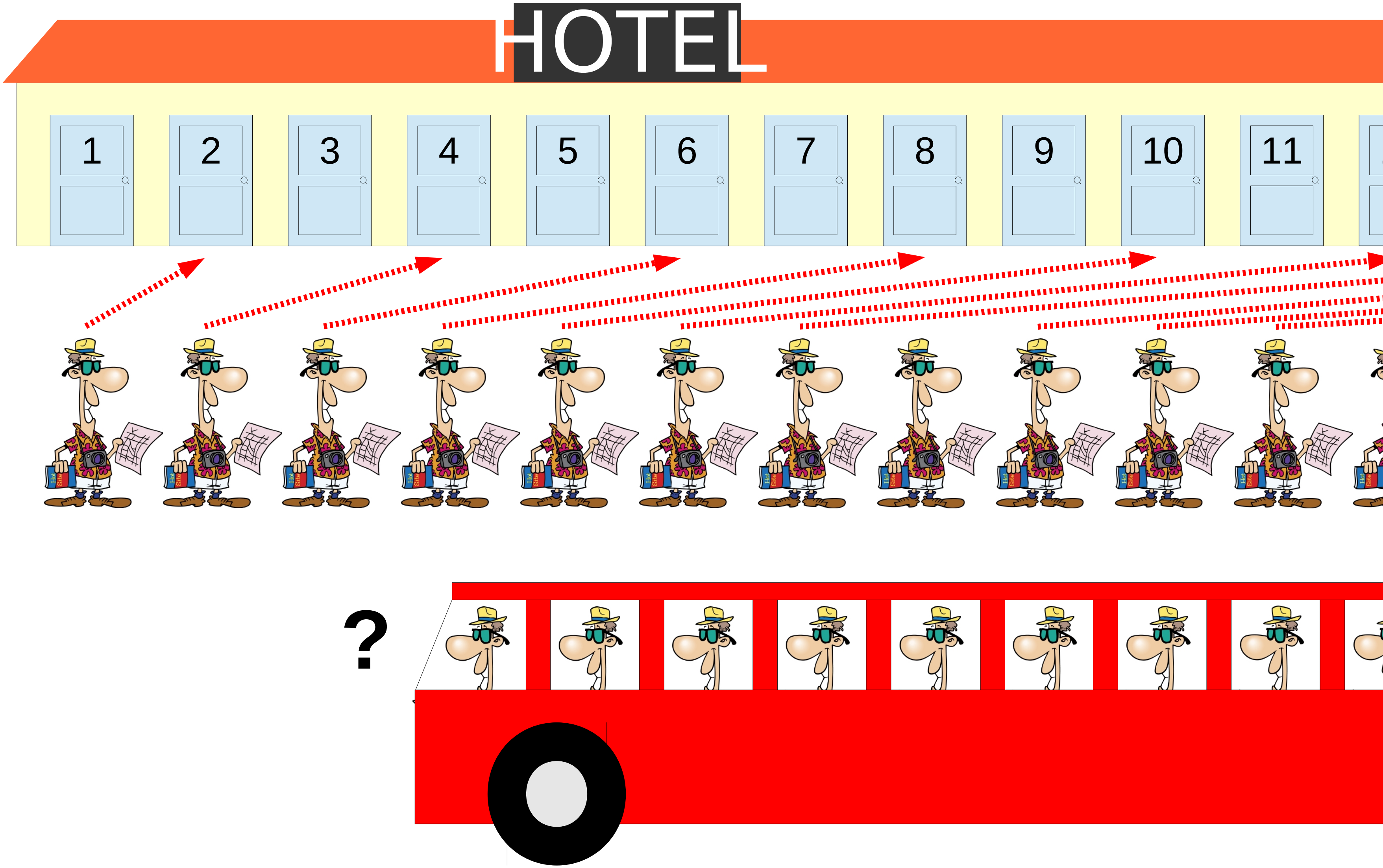
Hilbert's Hotel 2



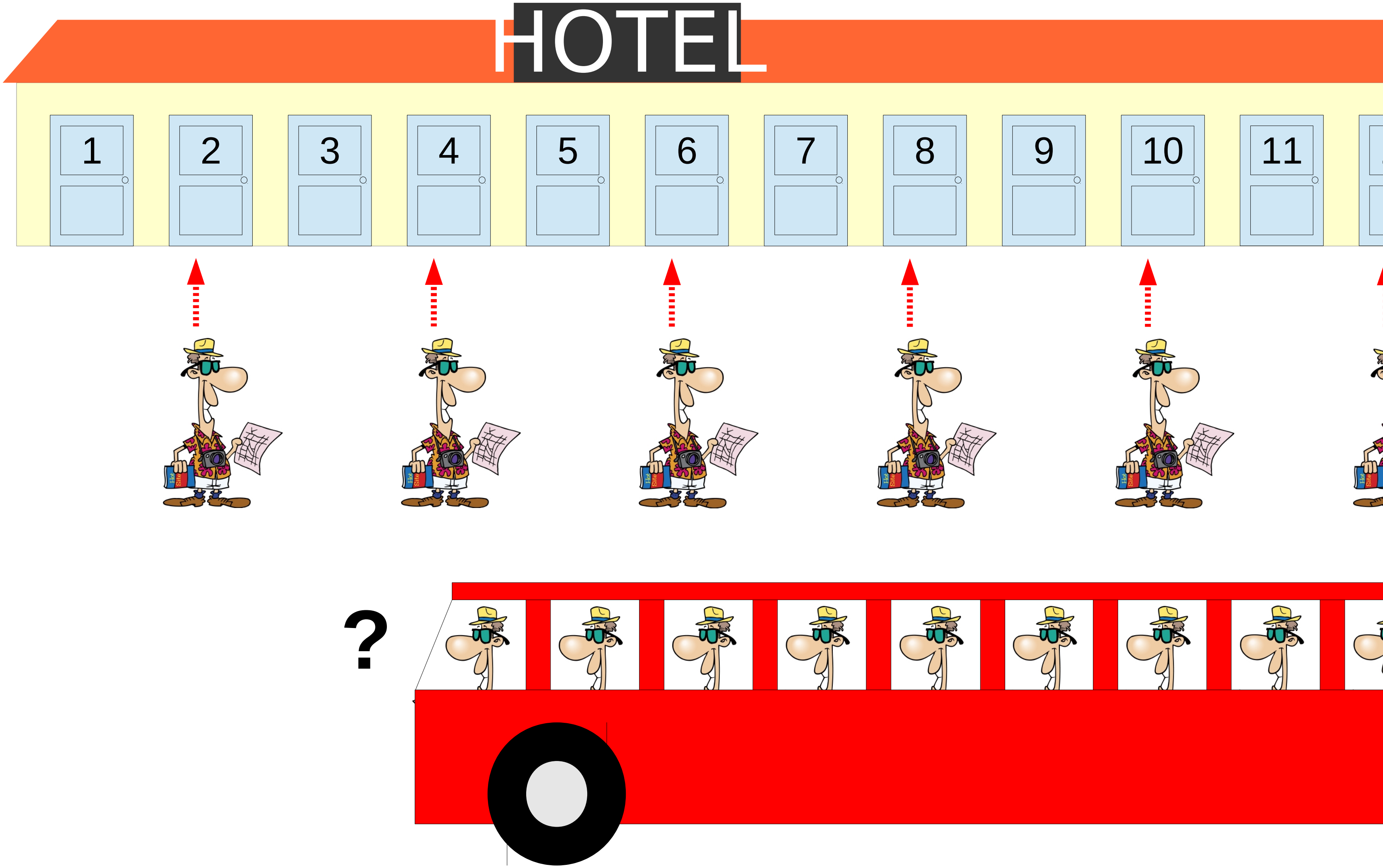
Hilbert's Hotel 2



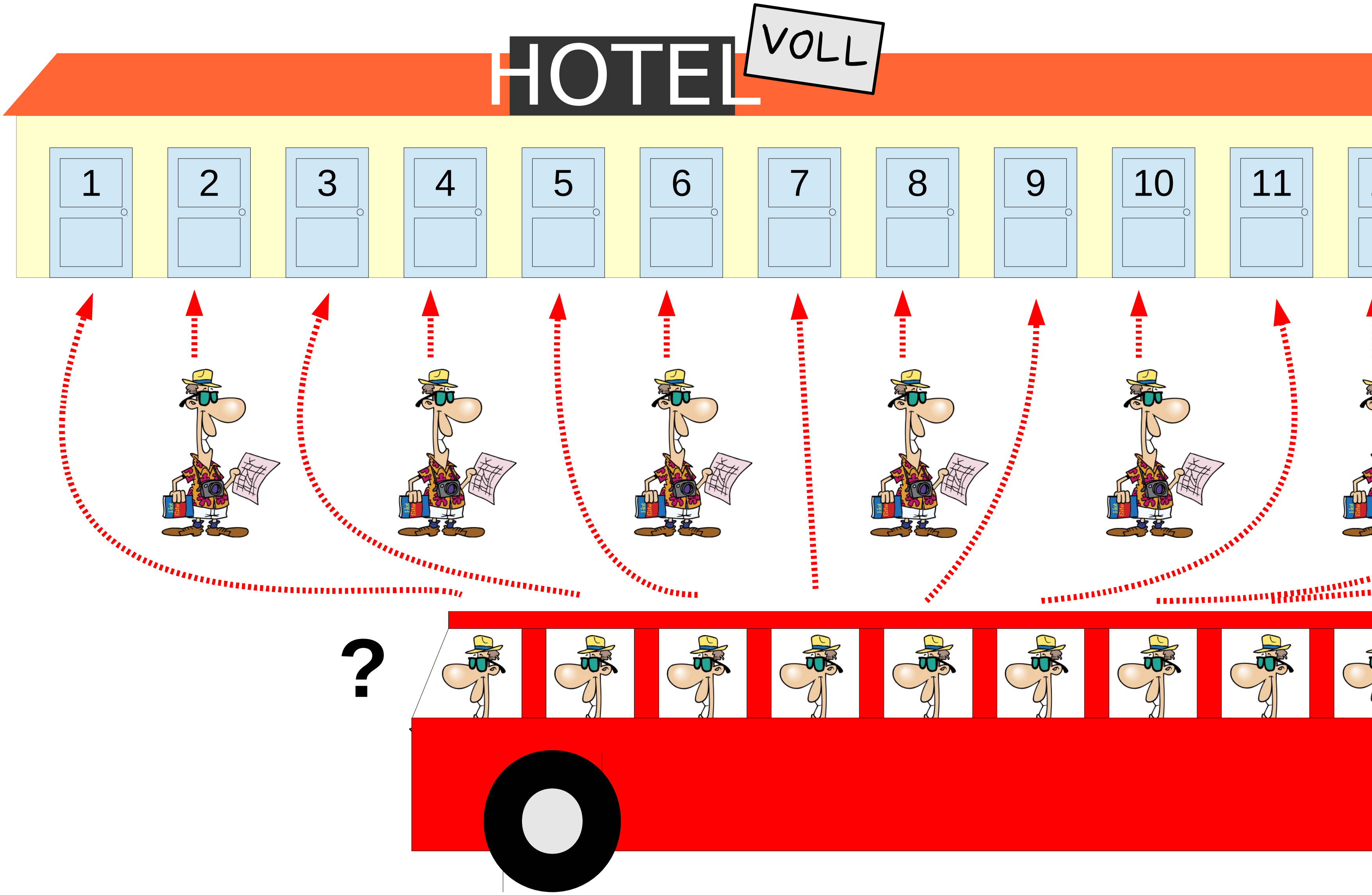
Hilbert's Hotel 2



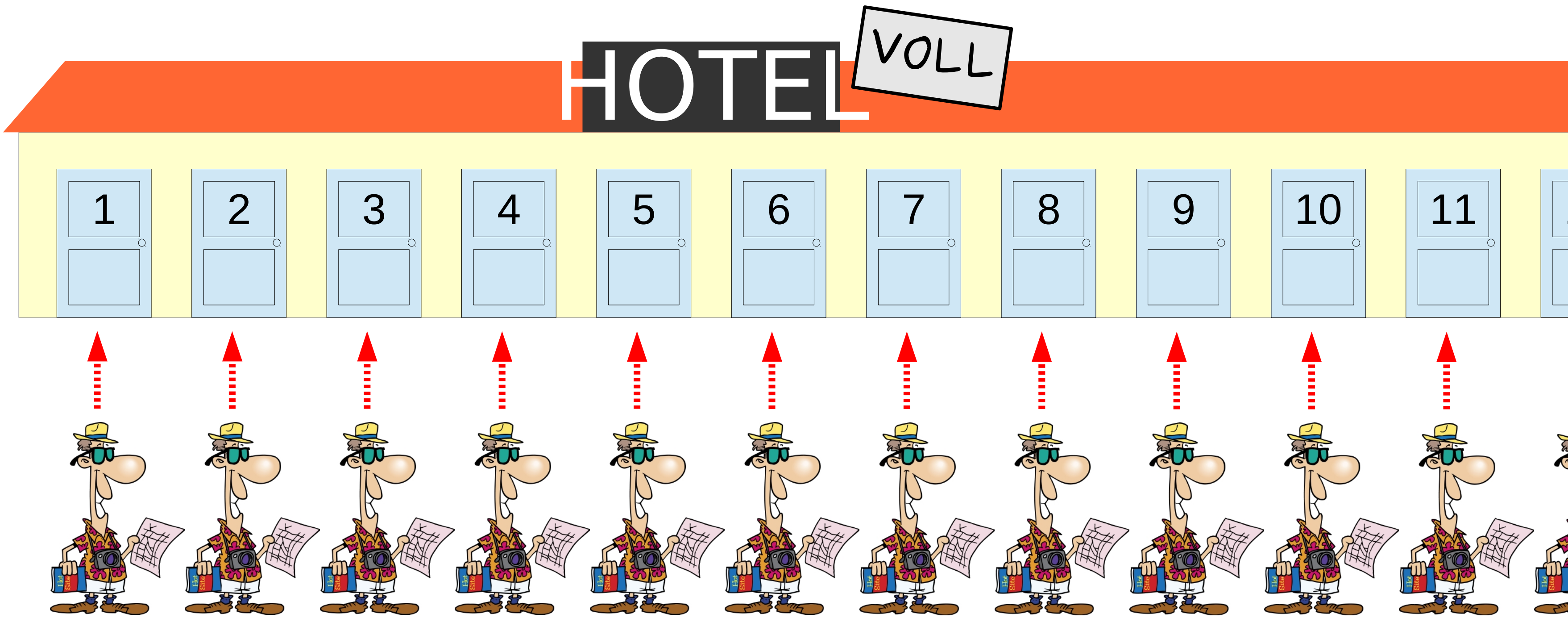
Hilbert's Hotel 2



Hilbert's Hotel 2



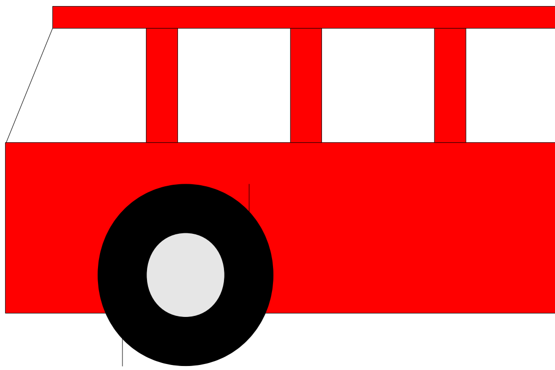
Hilbert's Hotel 2



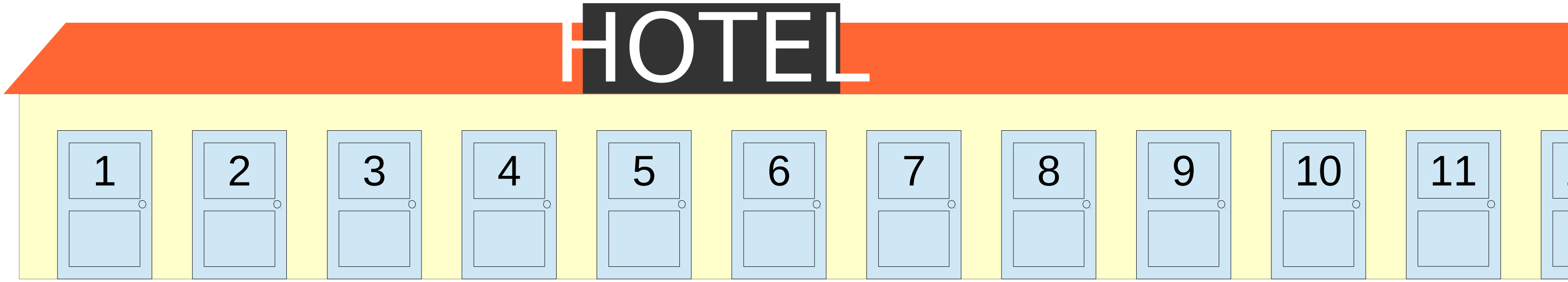
2. $2 \times \aleph_0 = ?$

A $\aleph_0$

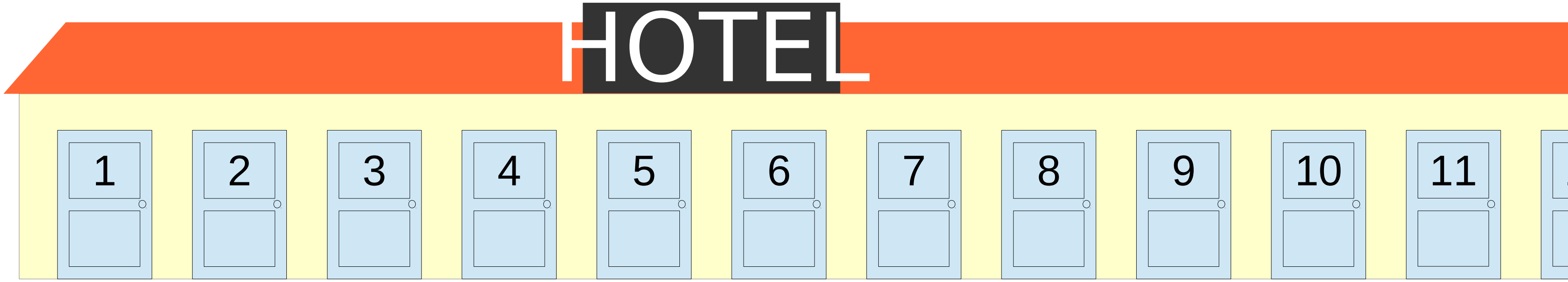
B $> \aleph_0$



Hilbert's Hotel 3



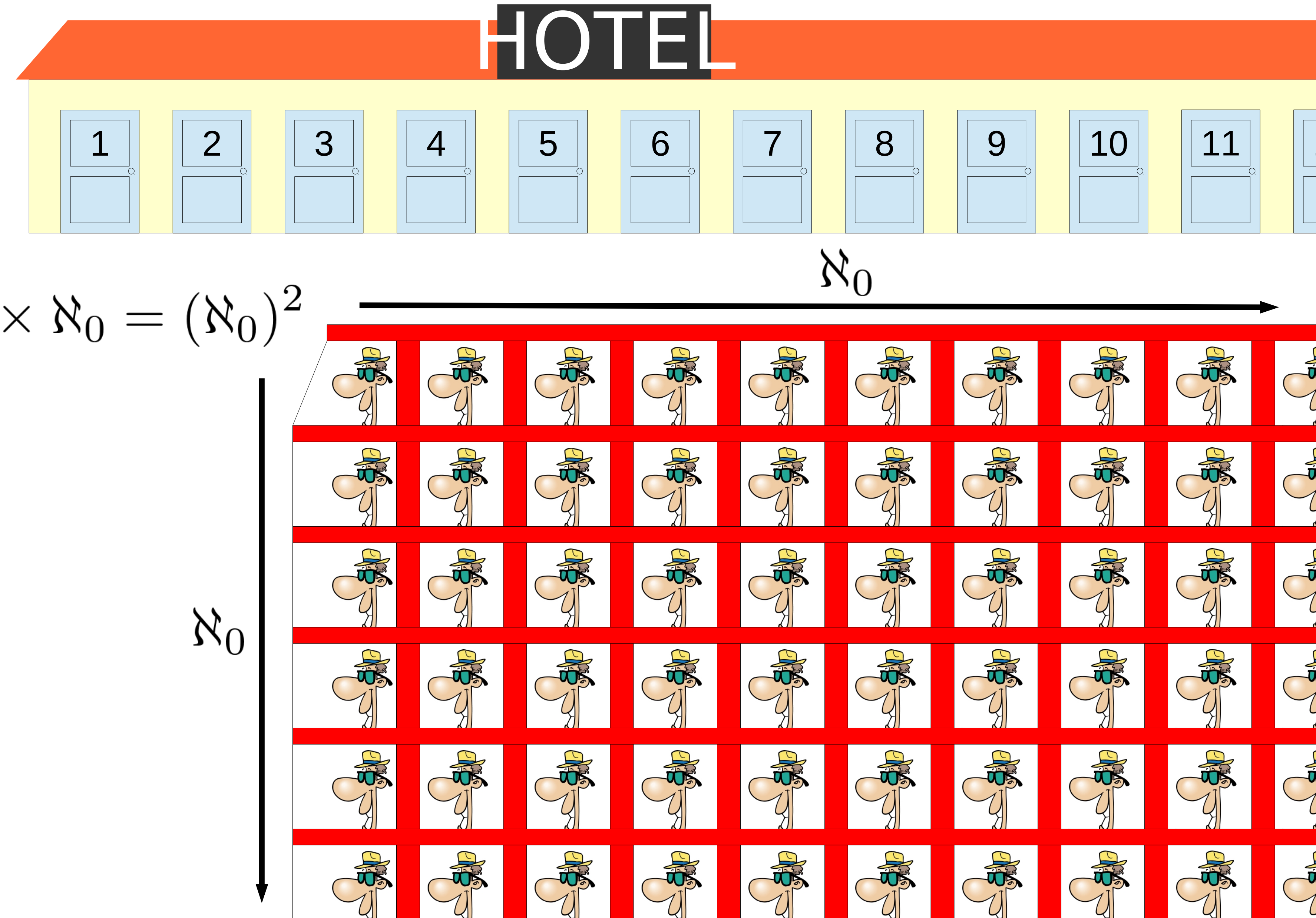
Hilbert's Hotel 3



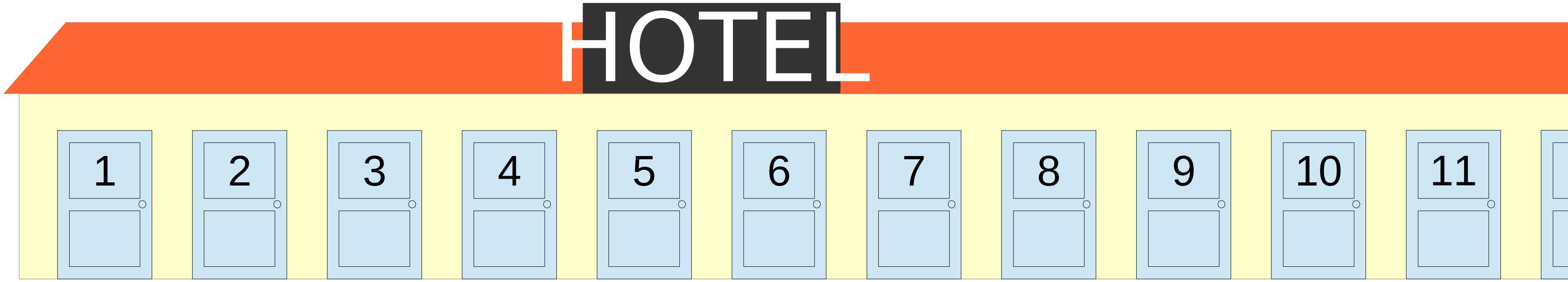
?

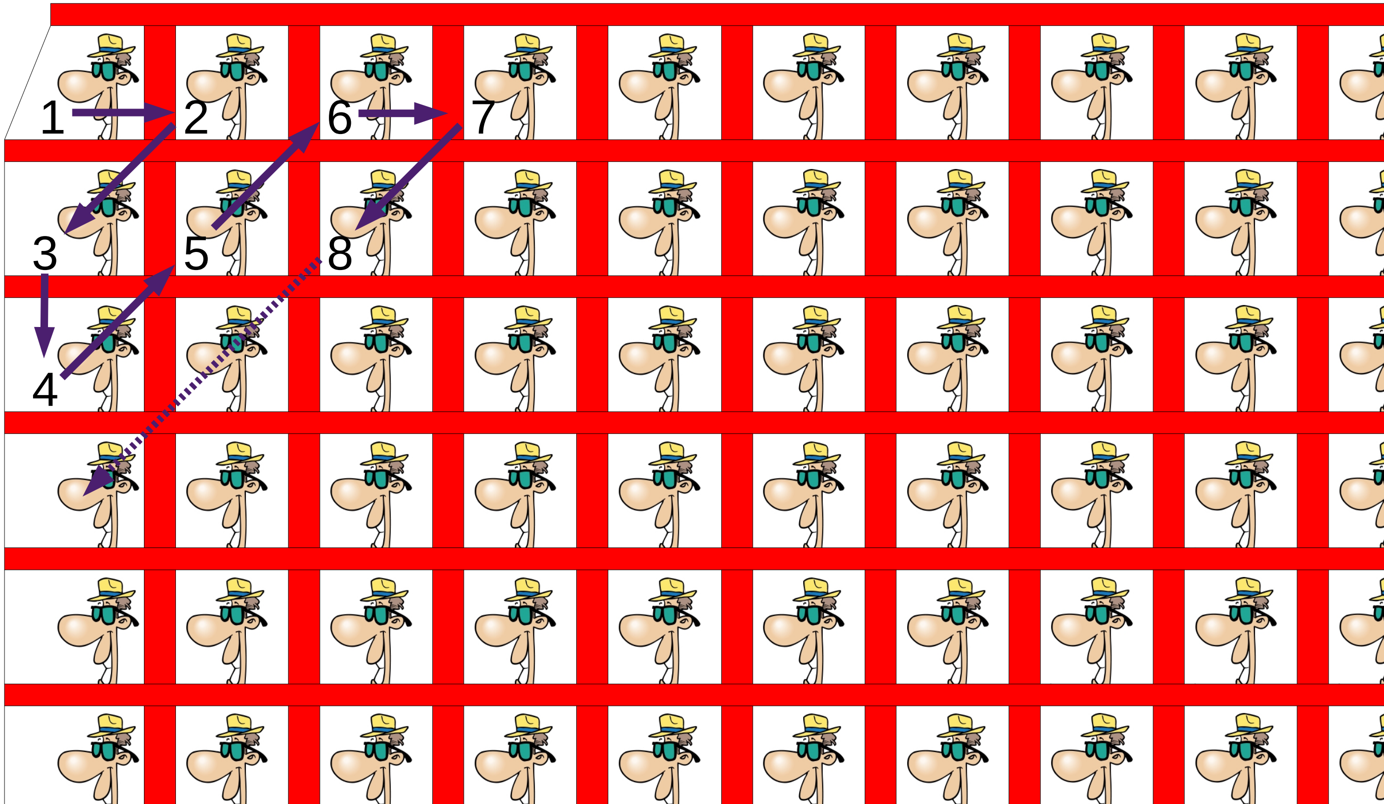
Hilbert's Hotel 3

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = (\aleph_0)^2$$

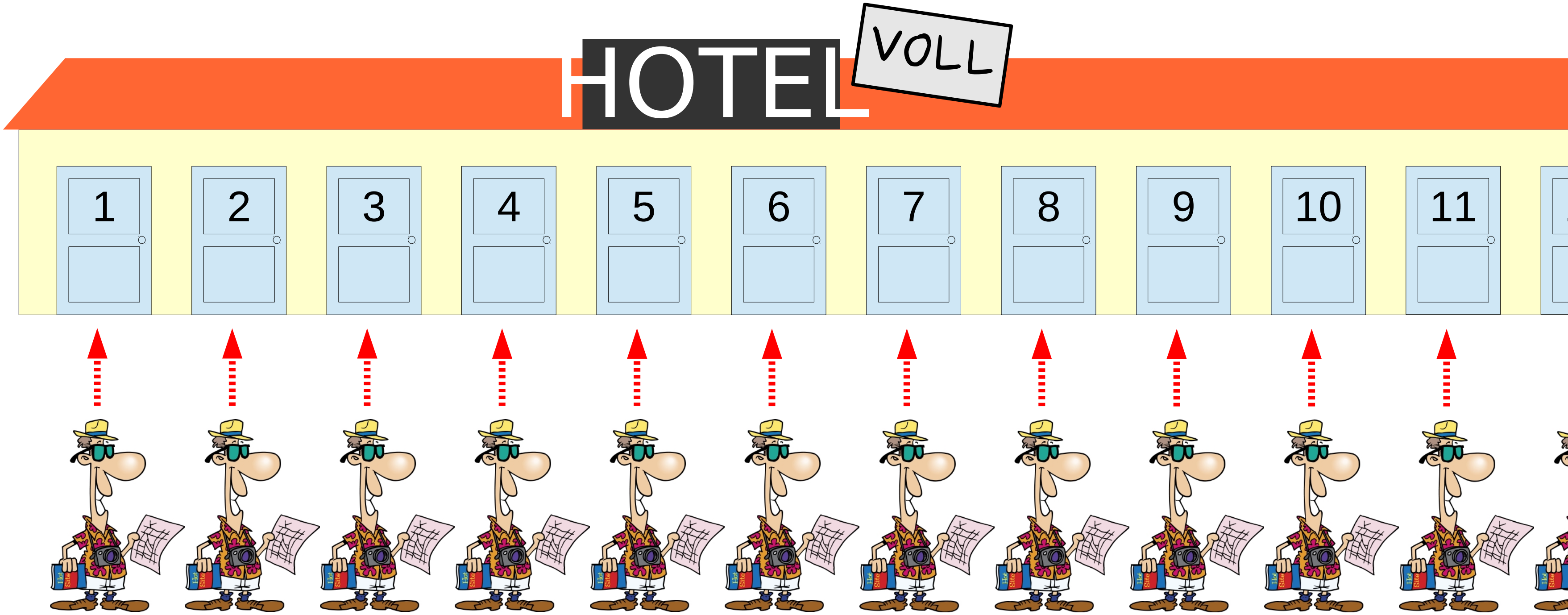


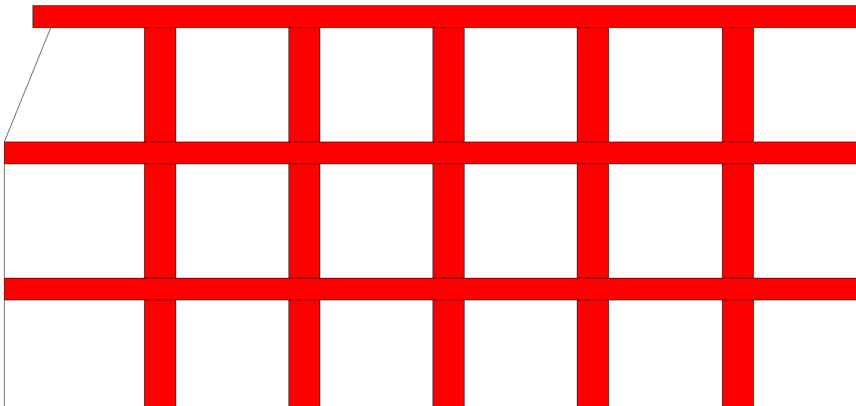
Hilbert's Hotel 3



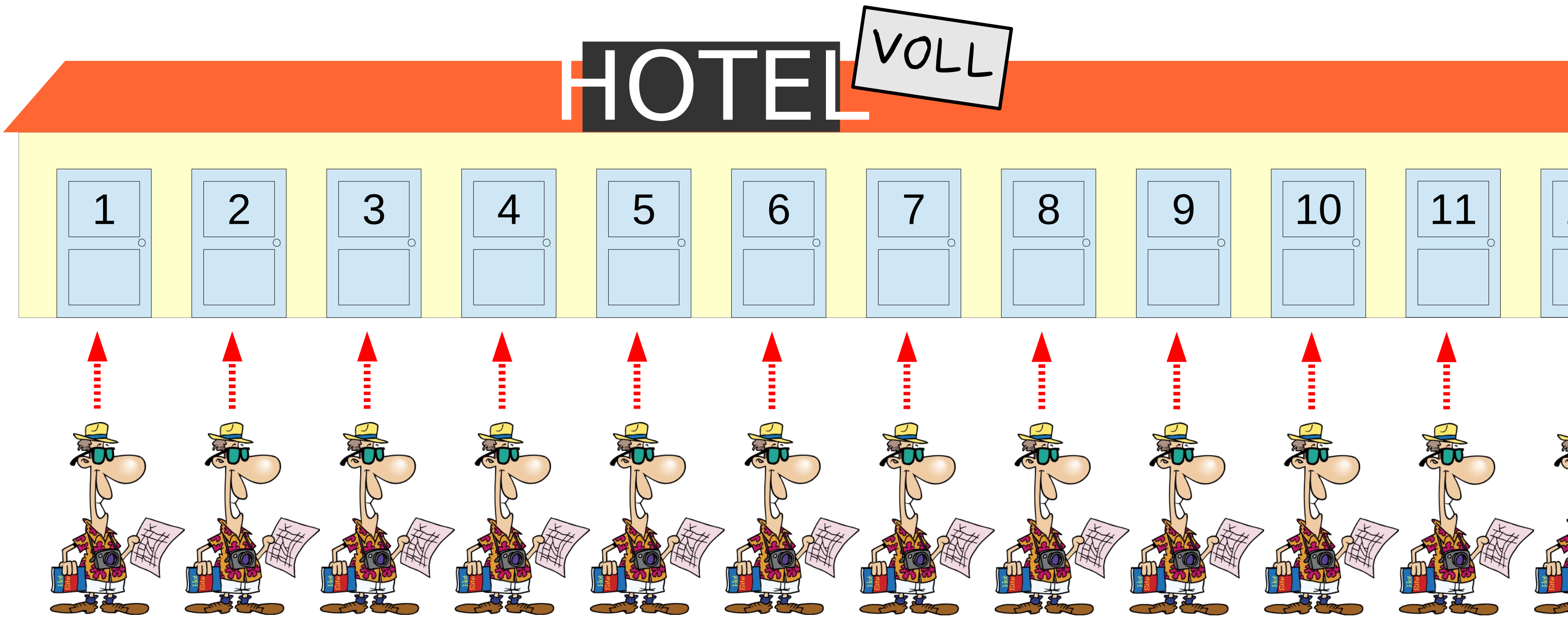


Hilbert's Hotel 3

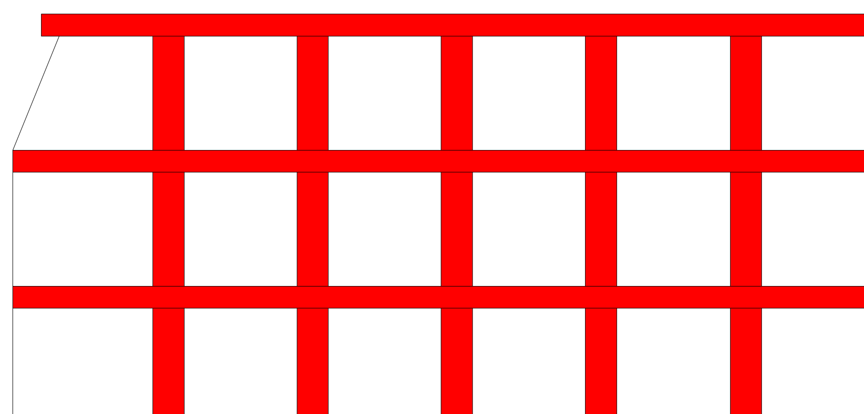




Hilbert's Hotel 3



3. $(\aleph_0)^2 = ?$ A $\aleph_0$ B $> \aleph_0$



Satz von Cantor

4. $2^{\aleph_0} = ?$

Ⓐ $\aleph_0$

Ⓑ $> \aleph_0$

Satz von Cantor.

$$2^x > x$$

für jede (unendliche) Zahl x.

Georg Cantor
(1845-1918)

Satz von Cantor

4. $2^{\aleph_0} = ?$

A $\aleph_0$

B $> \aleph_0$

Satz von Cantor.

$$2^x > x$$

für jede (unendliche) Zahl x.

Georg Cantor
(1845-1918)

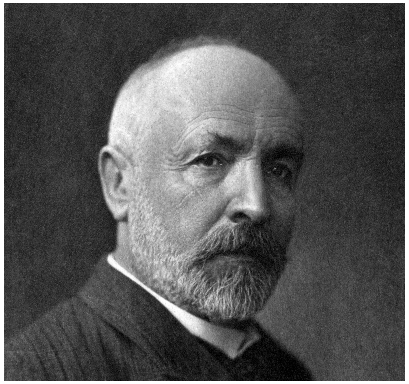
$4.$ $2^{\aleph_0} = ?$

Ⓐ $\aleph_0$ Ⓑ $> \aleph_0$

Satz von Cantor.

$$2^x > x$$

für jede (unendliche) Zahl x.



Georg Cantor
(1845-1918)

$5.$ Wie viel unendliche Zahlen gibt es?

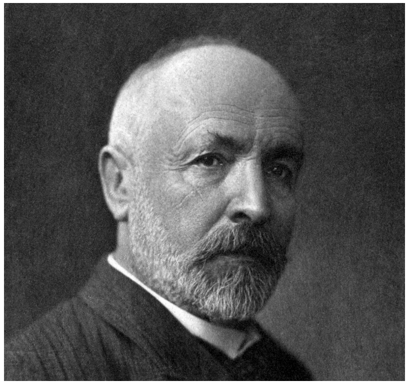
Ⓐ 1 Ⓑ Mehr Ⓒ Viel viel mehr

4. $2^{\aleph_0} = ?$ (A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

Satz von Cantor.

$$2^x > x$$

für jede (unendliche) Zahl x.



Georg Cantor
(1845-1918)

5. Wie viel unendliche Zahlen gibt es?

(A) 1 (B) Mehr (C) Viel viel mehr

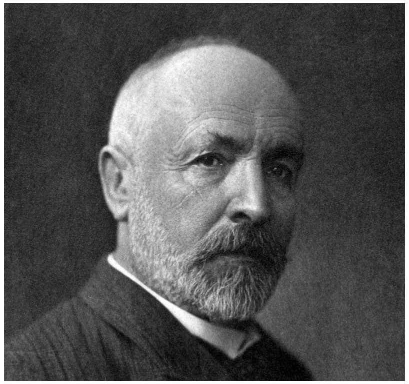
4. $2^{\aleph_0} = ?$

(A) $\aleph_0$ (B) $> \aleph_0$

Satz von Cantor.

$$2^x > x$$

für jede (unendliche) Zahl x.



Georg Cantor
(1845-1918)

5. Wie viel unendliche Zahlen gibt es?

(A) 1 (B) Mehr (C) Viel viel mehr