Erfolgsgeschichte eines stochastischen Prozesses: Die Brown'sche Bewegung

Wolfgang König

Weierstraß-Institut Berlin und Technische Universität Berlin

Robert Browns Entdeckung

1827 beobachtete der schottische Botaniker Robert Brown unter dem Mikroskop, wie Pflanzenpollen sich in einem Wassertropfen unregelmäßig hin- und herbewegten.

Browns Originalmikroskop

Robert Brown (1773-1858)

Robert Browns Entdeckung

1827 beobachtete der schottische Botaniker Robert Brown unter dem Mikroskop, wie Pflanzenpollen sich in einem Wassertropfen unregelmäßig hin- und herbewegten.

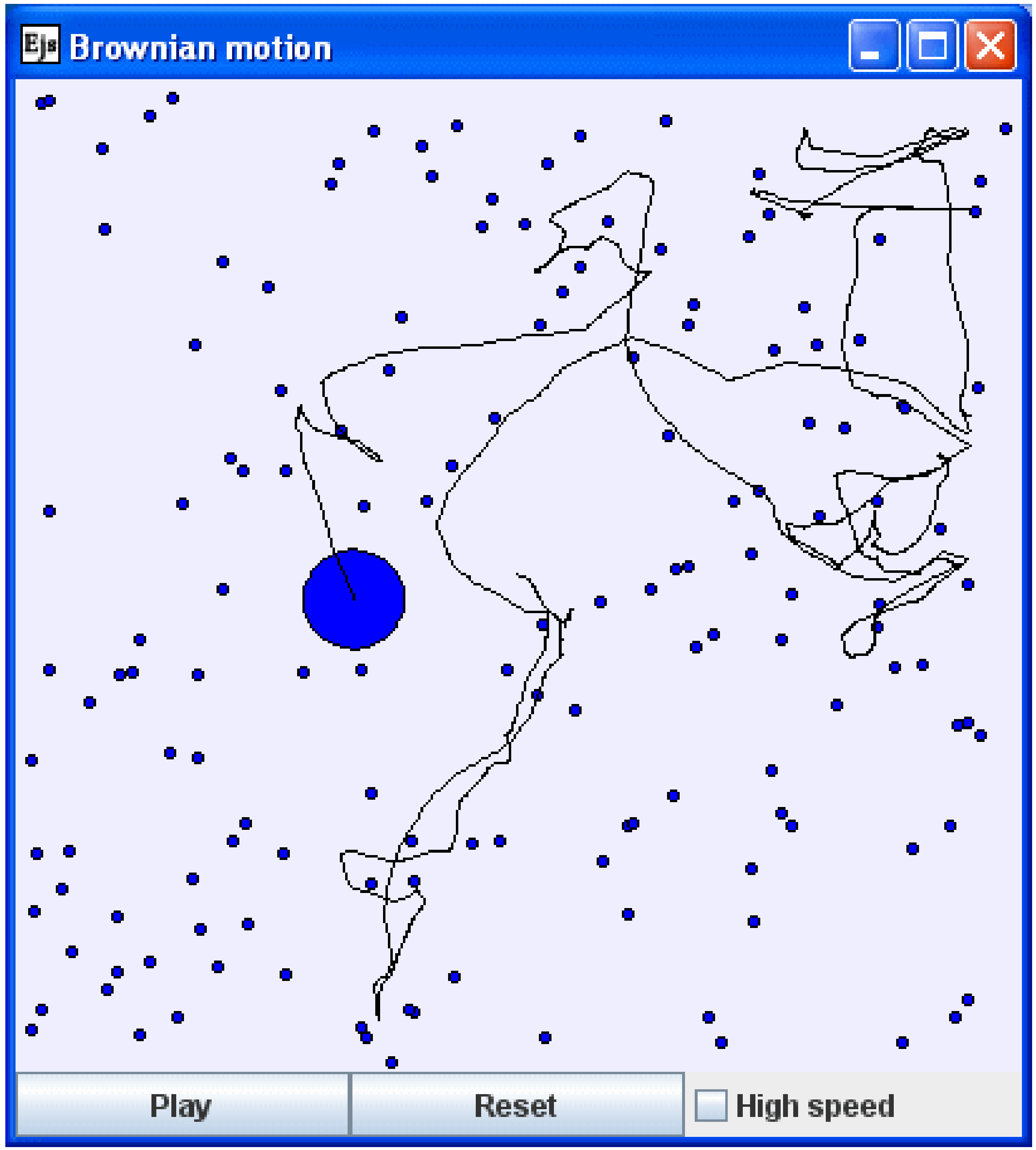
Browns Originalmikroskop

Robert Brown (1773-1858)

Weniger bekannt ist, dass bereits 1785
der Arzt und Botaniker Jan Ingenhousz
eine solche Bewegung
von Holzkohlestaub auf Alkohol beschrieb.

Jan Ingenhousz (1730-1799)

Was sah Brown?



Frühe Finanzmathematik

1880 beschrieb der Statistiker und Astronom THORVALD THIELE einen solchen Prozess auf mathematische Weise, als er Zeitreihen und die Verteilung von Residuen bei der Methode der kleinsten Quadrate studierte.

THORVALD NICOLAI THIELE (1838-1910)

Frühe Finanzmathematik

1880 beschrieb der Statistiker und Astronom THORVALD THIELE einen solchen Prozess auf mathematische Weise, als er Zeitreihen und die Verteilung von Residuen bei der Methode der kleinsten Quadrate studierte.

THORVALD NICOLAI THIELE (1838-1910)

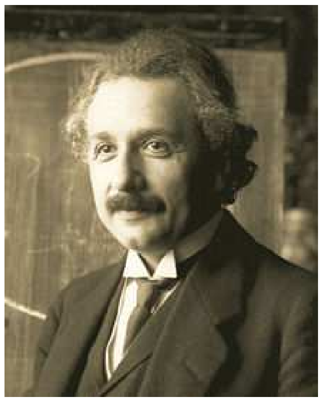
1900 analysierte der Mathematiker LOUIS BACHELIER Kursbewegungen mit diesem Prozess.
Sein Ansatz scheiterte letztendlich daran, dass der Prozess auch ins Negative gelangt, was für Aktienwerte unmöglich ist.

(Die geometrische Brownsche Bewegung löst dies und gilt nun als Standard (BLACK-SCHOLES-Modell 1973).)

LOUIS BACHELIER (1870-1946) um 1890

Physiker greifen ein

Der Durchbruch kam, als Albert Einstein 1905 und unabhängig von ihm Marian Smoluchowski 1906 diesen Prozess in seiner heutigen Gestalt definierten.

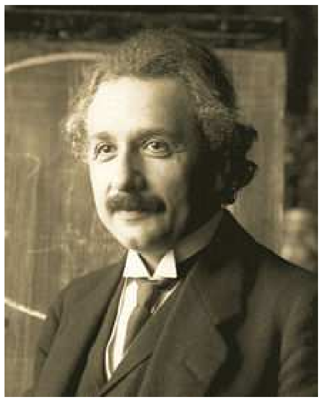


Albert Einstein (1879-1955) um 1921

Marian Smoluchowski (1872-1917)

Physiker greifen ein

Der Durchbruch kam, als ALBERT EINSTEIN 1905 und unabhängig von ihm MARIAN SMOLUCHOWSKI 1906 diesen Prozess in seiner heutigen Gestalt definierten.



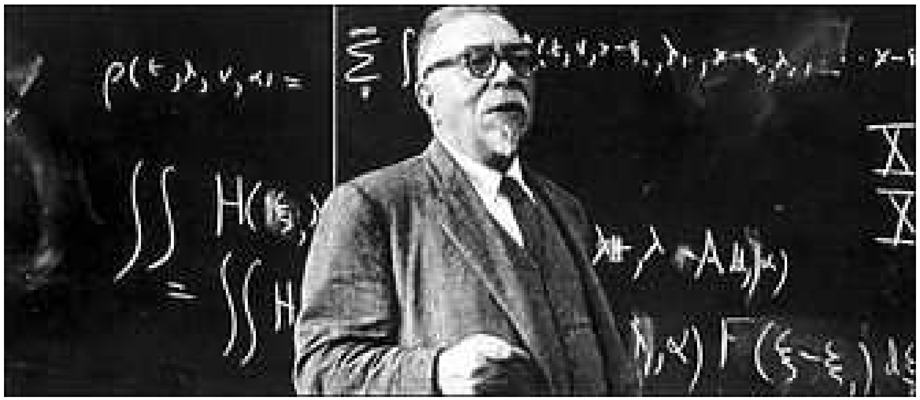
ALBERT EINSTEIN (1879-1955) um 1921

MARIAN SMOLUCHOWSKI (1872-1917)

Einstein zog dabei die molekulare Struktur des Wassers heran (damals äußerst kontrovers, heute aber unbestritten) und untermauerte dies mathematisch. In seinem Modell legen die Partikel in jeder Sekunde eine unendlich lange Strecke zurück. Dieser Ansatz bedeutete den Durchbruch sowohl für die molekulare Theorie als auch für den stochastischen Prozess.

Neue stochastische Theorie

Eine mathematische Konstruktion auf Basis der Maßtheorie, von Lebesgue und Borel neu entwickelt, gelang erst 1923 Norbert Wiener. Sein Beweis war extrem lang und kompliziert.

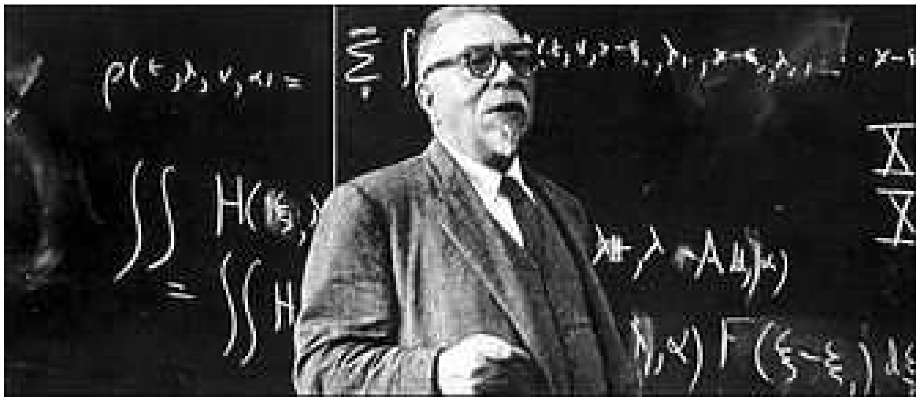


Norbert Wiener (1894-1964)

Wieners Arbeiten markieren den Beginn der mathematischen Theorie der Stochastischen Prozesse. Ihm zu Ehren sprechen wir auch vom Wiener-Prozess.

Neue stochastische Theorie

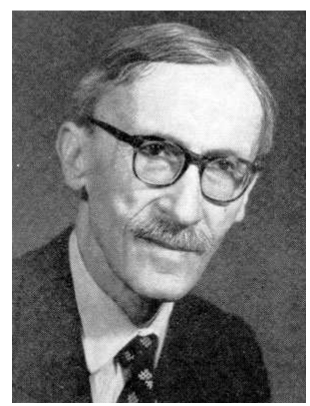
Eine mathematische Konstruktion auf Basis der Maßtheorie, von LEBESGUE und BOREL neu entwickelt, gelang erst 1923 NORBERT WIENER. Sein Beweis war extrem lang und kompliziert.



NORBERT WIENER (1894-1964)

Wieners Arbeiten markieren den Beginn der mathematischen Theorie der Stochastischen Prozesse. Ihm zu Ehren sprechen wir auch vom Wiener-Prozess.

Anhand des Wiener-Prozesses entwickelte PAUL LÉVY in den 1930er Jahren die Theorie und baute sie aus. Er bewies viele interessante Eigenschaften des Wiener-Prozesses.



PAUL LÉVY (1886-1971)

Stochastische Analysis

Die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen, in der der Wiener-Prozess die fundamentale Rolle spielt, wurde in den 1940er Jahren von Itō Kiyoshi begründet.

Itō Kiyoshi (1915 – 2008)

Stochastische Analysis

Die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen, in der der Wiener-Prozess die fundamentale Rolle spielt, wurde in den 1940er Jahren von ITŌ KIYOSHI begründet.

ITŌ KIYOSHI (1915 – 2008)

Danach wird die Publikationsflut über die Brown'sche Bewegung in Mathematik und Physik unüberschaubar.

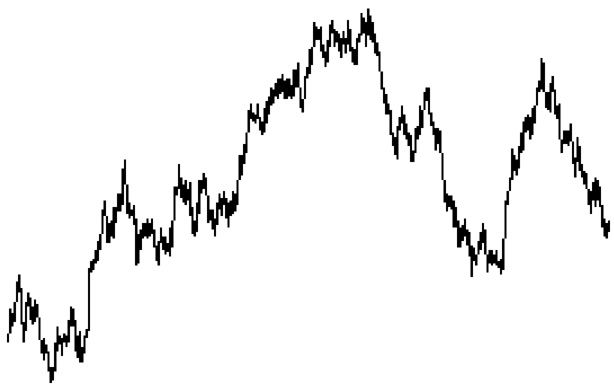
- Anzahl der google-Treffer für 'Brownian motion': 1.040.000.
- Anzahl der in MathSciNet registrierten Artikel mit 'Brownian motion' im Titel: 10725 (von insgesamt 2.336.256 Artikeln).
- Anzahl der in scopus registrierten Artikel mit 'Brownian motion' im Titel oder Abstract: 10.868.

Mathematische Beschreibung

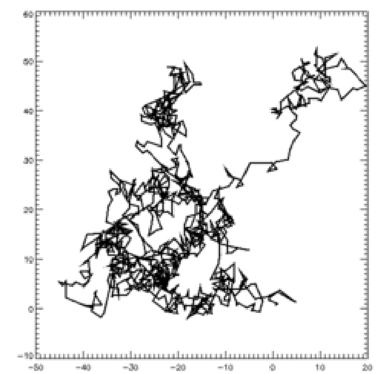
- Die Brown'sche Bewegung ist ein stetiger stochastischer Prozess mit
  - Werten in $\mathbb{R}^d$ und Start in 0,
  - Gauss-verteilten Marginalen und
  - unabhängigen Zuwächsen.

Mathematische Beschreibung

- Die Brown'sche Bewegung ist ein stetiger stochastischer Prozess mit
  - Werten in $\mathbb{R}^d$ und Start in 0,
  - Gauss-verteilten Marginalen und
  - unabhängigen Zuwächsen.



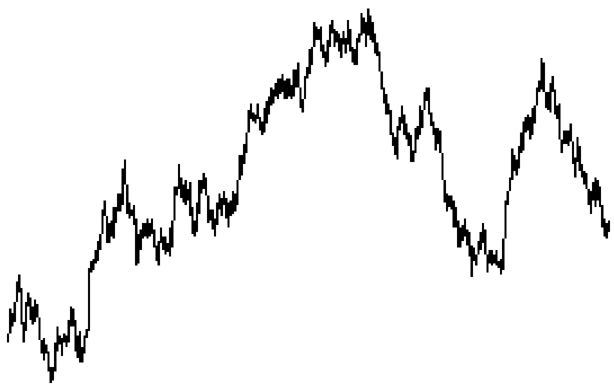
Eindimensionale Brown'sche Bewegung



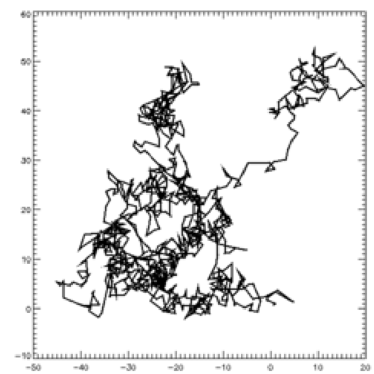
Zweidimensionale Brown'sche Bewegung

Mathematische Beschreibung

- Die Brown'sche Bewegung ist ein stetiger stochastischer Prozess mit
  - Werten in $\mathbb{R}^d$ und Start in 0,
  - Gauss-verteilten Marginalen und
  - unabhängigen Zuwächsen.



Eindimensionale Brown'sche Bewegung



Zweidimensionale Brown'sche Bewegung

- Mirakulöse Eigenschaften der zweidimensionalen Brown'schen Bewegung sind:
  - Ihre Pfade sind unendlich lang und nirgends differenzierbar.
  - Sie trifft jede Kugel unendlich oft.
  - Sie windet sich unendlich oft um jeden Punkt (außer ihren Startpunkt).
  - Die Menge der Punkte der Ebene, die sie unendlich oft trifft, ist zweidimensional.

Bedeutung

- Die Brown’sche Bewegung und ihre Varianten werden angewendet in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie.

Bedeutung

- Die Brown'sche Bewegung und ihre Varianten werden angewendet in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie.
- Die Brown'sche Bewegung spielt eine verbindende Rolle zwischen mehreren mathematischen Zweigen (Wahrscheinlichkeitstheorie, partielle Differentialgleichungen, Operatortheorie, Potentialtheorie, ...) sowie zwischen der Mathematik und der Physik.

Bedeutung

- Die Brown'sche Bewegung und ihre Varianten werden angewendet in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie.

- Die Brown'sche Bewegung spielt eine verbindende Rolle zwischen mehreren mathematischen Zweigen (Wahrscheinlichkeitstheorie, partielle Differentialgleichungen, Operatortheorie, Potentialtheorie, ...) sowie zwischen der Mathematik und der Physik.

- In der stochastischen Theorie ist die Brown'sche Bewegung jeweils der Prototyp eines
  - stetigen Markov-Prozesses,
  - Gauss'schen Prozesses,
  - selbstähnlichen Prozesses,
  - stetigen Martingals.

Bedeutung

- Die Brown’sche Bewegung und ihre Varianten werden angewendet in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie.
- Die Brown’sche Bewegung spielt eine verbindende Rolle zwischen mehreren mathematischen Zweigen (Wahrscheinlichkeitstheorie, partielle Differentialgleichungen, Operatortheorie, Potentialtheorie, ...) sowie zwischen der Mathematik und der Physik.
- In der stochastischen Theorie ist die Brown’sche Bewegung jeweils der Prototyp eines
  - stetigen Markov-Prozesses,
  - Gauss’schen Prozesses,
  - selbstähnlichen Prozesses,
  - stetigen Martingals.
- Die Brown’sche Bewegung ist der universelle Reskalierungsgrenzwert von Irrfahrten.

Bedeutung

- Die Brown'sche Bewegung und ihre Varianten werden angewendet in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie.

- Die Brown'sche Bewegung spielt eine verbindende Rolle zwischen mehreren mathematischen Zweigen (Wahrscheinlichkeitstheorie, partielle Differentialgleichungen, Operatortheorie, Potentialtheorie, ...) sowie zwischen der Mathematik und der Physik.

- In der stochastischen Theorie ist die Brown'sche Bewegung jeweils der Prototyp eines
  - stetigen Markov-Prozesses,
  - Gauss'schen Prozesses,
  - selbstähnlichen Prozesses,
  - stetigen Martingals.

- Die Brown'sche Bewegung ist der universelle Reskalierungsgrenzwert von Irrfahrten.

- Es gibt nach wie vor viele offene Fragen über die Brown'sche Bewegung, und es kommen ständig neue hinzu.

Im Studium

Wer im Mathematikstudium an der TU Berlin die Brown'sche Bewegung näher kennenlernen möchte, belegt

- Maß- und Integrationstheorie im 3. Semester,
- Wahrscheinlichkeitstheorie 1 im 4. Semester,
- Wahrscheinlichkeitstheorie 2 im 5. Semester (Konstruktion mit Irrfahrten, erste Eigenschaften),
- Stochastische Prozesse im 6. Semester (weitere Eigenschaften, weitere Prozesse),
- Vertiefungen ab dem 5. Semester (Finanzmathematik, Probabilistische Potentialtheorie etc.).

Viel Spaß!