# Was sind Zahlen?
# Intuition vs. Axiomatik in der Mathematik

*Holger Stephan*, Berlin*
Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

30. April 2022

**Text zu den Folien des Lehrervortrages
zum 25. Tag der Mathematik an der Freien Universität Berlin**

## 1. Folie. Deckblatt

- Im Weierstraß-Institut beschäftige ich mich (und viele andere Wissenschaftler) mit der Modellierung naturwissenschaftlicher Prozesse. Dabei geht es darum, mathematische Objekte zur Beschreibung von realen Objekten auszuwählen, für ein relevantes reales Objekt ein geeignetes mathematisches zu finden. Hat man das gemacht, kann man den gesamten mathematischen Apparat anwenden und am Ende zum Beispiel eine Computersimulation des ursprünglichen naturwissenschaftlichen Prozesses erhalten.

  Bei der Zuordnung von realen und mathematischen Objekten springt man natürlich zwischen intuitiven und axiomatischen Vorstellungen hin und her. Man kann sich vorstellen, daß das – falls intuitive und axiomatische Vorstellungen etwas Verschiedenes sind – zu Fehlern führen kann.
- Die typische Situation ist hier, daß die Realität mit der Simulation erst einmal nicht übereinstimmt. Untersucht man diesen Zustand stellt man fest, daß sich die (theoretischen) mathematischen Objekte ganz anders verhalten als die realen Objekte.
- Das liegt nicht am fehlenden Können des Modellierers (natürlich nicht!) sondern hat prinzipielle Gründe. Geht man bei der Untersuchung dieser Gründe in die Tiefe, stellt man fest, daß sich Theorie und Praxis bereits in den Anfängen der Mathematik – bei den Zahlen – prinzipiell unterscheiden.
- Die Zahlen bilden zweifellos eine der wichtigsten Grundlagen der Mathematik. Zumindest in den letzten Jahrhunderten war es das Ziel, alles in der Mathematik (und nicht nur dort) *berechenbar* zu machen. Ein typisches Beispiel dafür ist die Entwicklung der analytischen Geometrie, die es möglich machte geometrische Probleme auf arithmetische Probleme zurückzuführen.
- Zahlen gehören auch zu den ältesten und geläufigsten mathematischen Objekten. Es gibt weltweit viele Analphabeten, aber nur wenige erwachsene Menschen, die nicht wenigstens ein bißchen rechnen können. Auch bei Kinder entwickelt sich ein Zahlengefühl weit früher als die Fähigkeit zu lesen.
- Im Vortrag wird besonders viel Wert darauf gelegt, wie axiomatische Vorstellungen den intuitiven widersprechen. Dabei könnte der Eindruck entstehen, daß der Autor/Vortragende

*e-mail: `stephan@wias-berlin.de` URL: `http://www.wias-berlin.de/people/stephan`

das axiomatische Herangehen in der Mathematik geringschätzt. Dieser Eindruck – sollte er entstehen – wäre falsch.

Axiomatik und Intuition sind einfach zwei untrennbare Seiten einer Medaille. In diesem Vortrag wird diese Dualität nur aus der Sicht der Intuition beleuchtet.

## 2. Folie. Drei Quellen für diesen Vortrag

- Ich will untersuchen, wie sich die Mathematik entwickeln würde, wenn man an sie intuitiv herangeht. Dazu betrachte ich drei erkenntnistheoretischen Quellen: Anwendung, Geschichte und Kinder.
- Der Realität nähert man sich natürlich erst einmal intuitiv, erst später versucht man, die Beobachtungen in eine Theorie einzubinden.
- Historisch ging es bei der Entwicklung oft darum, neue Werkzeuge anzuwenden, ohne sich über ihre Grundlagen Gedanken zu machen. Erst später, meistens wenn Probleme auftreten, hat man sich den Grundlagen gewidmet. Hierbei bedeutet „neue Werkzeuge anzuwenden“ nicht die Anwendung der Mathematik im heutigen Sinne, also Anwendung für einen praktischen Zweck. Stets hat man die Mathematik auch „aus Spaß“ angewendet, hatte Freude am Lösen interessanter Aufgaben.
- Kinder nähern sich der Mathematik natürlich intuitiv. Abstraktes Denken setzt bei den Kindern etwa mit 7 Jahren ein und für Theorie interessieren sich Kinder erst mit etwa 14 Jahren.

  Schon sehr kleine Kinder können sehr viel und schnell auswendig lernen. Dabei sollte nicht der Eindruck entstehen, daß sie den Inhalt auch „verstanden“ haben. Das „Verständnis“ einer Sache entwickelt sich im gesamten Leben. Man kann jederzeit, in jedem Alter, immer tiefer in ein Sachgebiet eindringen. Das „Verständnis“ dieser Sache hängt sehr mit der allgemeinen Denkweise des Menschen zusammen.

  Standardwerke für die Entwicklung der mathematischen Denkweise bei Kindern sind natürlich die Bücher von Jean Piaget (siehe [8, 9, 10]). Allerdings habe ich zum Teil andere Erfahrungen gemacht und kann deshalb nicht alle Aussagen von Piaget teilen.

## 3. Folie. Theorie und Praxis

- Die Entwicklung der Theorie – sowohl in der Physik als auch in der Mathematik – ist in großem Maße auf Vereinheitlichung gerichtet. Besonders in der theoretischen Physik wird das deutlich mit der Erklärung von optischen, elektrischen, magnetischen und einigen anderen Erscheinungen als verschiedene Formen von Elektromagnetismus. Später kam es zur Vereinheitlichung der starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen. Das große Ziel in der theoretischen Physik ist die „große Vereinigung“ (GUT = „Grand Unified Theory“) mit der Gravitation, die Entwicklung einer TOE („theory of everything“), einer „Weltformel“.

  Hierbei geht es stets um die Entwicklung eines gemeinsamen *mathematischen Apparats*, nicht etwa um eine Vereinheitlichung der realen Effekte.

  Dieses Ansinnen ist für die Entwicklung der Wissenschaft gut und richtig.

Daß es letztlich nicht erfolgreich sein kann, zeigen die Rückschläge dieser Idee in der Geschichte. So war man bis zum Anfang des 20. Jahrhunderts ganz sicher, daß man letztlich alles auf rein mechanische Zusammenhänge zurückführen kann. Das war hervorgerufen durch den gewaltigen Siegeszug der analytischen Mechanik im 19. Jahrhundert. Die Entdeckung von Quanteneffekten hat dem ein Ende gesetzt.

- Die Praxis dagegen entwickelt sich genau entgegengesetzt. Durch die technische Entwicklung ist es immer mehr möglich, ins Detail zu gehen, neue Effekte zu entdecken und die Kenntnisse über die Realität immer weiter aufzufächern.
- Daß sich die realen Prozesse – die physische Welt – in Raum und Zeit abspielen ist wohl kein Geheimnis. Dagegen fällt es vielleicht nicht so auf, daß sich die Gedanken – die geistige Welt – außerhalb von Raum und Zeit entwickeln. Hierfür gibt es viele Indizien:
  - Mathematische Sätze, z.B. der Satz des Pythagoras, sind ewig wahr. Sie waren wahr, bevor sie bewiesen wurden (wir wußten das nur noch nicht) und werden ewig wahr sein.
  - Wenn man über ein Problem nachdenkt, spielen Raum und Zeit keine Rolle, bis sich die physische Welt etwa durch Hunger oder schreiende Kinder wieder in Erinnerung ruft.
  - Schreibt man z.B. einen Kriminalroman, hat man den Inhalt im Prinzip vollständig im Kopf, Raum und Zeit spielen keine Rolle. Beim Aufschreiben muß man den Inhalt so in eine lineare Form bringen, daß der Leser beim physischen Lesen des Romans, das sich natürlich in Raum und vor allem in der Zeit abspielt, den Inhalt mit Spannung liest. Hat er den Roman gelesen, hat er – wie der Autor – den gesamten Inhalt im Kopf. Raum und Zeit waren nur nötig um den Geisteszustand des Autors auf den des Lesers zu übertragen
- Wir konzentrieren uns hier auf Frage, wo die Theorie nicht zur Praxis paßt. Man könnte auch den umgekehrten, von Hegel vorgeschlagenen Weg gehen, der nur auf den ersten Blick unsinnig klingt.

# 4. Folie. Zur Geschichte: Spengler über Zahlen

- Das berühmte Buch von Spengler *Der Untergang des Abendlandes* ist – obwohl vor genau hundert Jahren vollständig erschienen – auch heute noch aktueller denn je.
- Bei der Untersuchung der kulturgeschichtlichen Phasen der verschiedenen Zivilisationsepochen betrachtet Spenger auch die Mathematik und stellt fest, daß Zahlen in den verschiedenen Epochen eine verschiedene Rolle gespielt haben.

  Man kann sich vorstellen, daß die Ansicht über ein Objekt (hier der Zahlen), darauf auswirkt, was die Menschen der entsprechenden Epoche mit dem Objekt anstellen.

# 5. Folie. Die alten Griechen

- Die Griechen haben zwei Sorten von Zahlen streng unterschieden: Größen und Verhältnisse. Das widerspiegelt die beiden Typen von physikalischen Größen nämlich *extensive* und *in-*

*tensive* (siehe [11]). Das ist nicht verwunderlich, denn die Griechen sind von geometrischen, also aus der Praxis entnommenen Vorstellungen, ausgegangen.

Hier muß man aber berücksichtigen, daß die Griechen in großem Maße auch Theoretiker waren und das Wesen (Platon: die Idee) hinter den Objekten zu ergründen versuchten. Siehe z.B. Euklids Axiome wie: *Ein Punkt ist, was keine Länge hat.*

- Die 1 zählte bei den Griechen nicht als Zahl, sondern als Einheit. Die Zahlen 2, 3, ... sind zumindest nicht nur als Zusammenfassung von z.B. Steinchen entstanden sondern durch Teilung einer Einheit in 2, 3, ... Teile.

  Übrigens läßt sich so auch erklären, warum die Ägypter nur mit Stammbrüchen (Brüche mit Zähler = 1) gearbeitet haben. Sie haben gar nicht mit Brüchen gearbeitet sondern mit der Anzahl der Teile, in die sie die Einheit geteilt haben.

- Zenons Paradoxa beschreiben gerade die Probleme, um die es in diesem Vortrag geht. Sie sind meiner Meinung nach bis heute nicht richtig verstanden sondern nur wegdiskutiert worden.

# 6. Folie. Die Neuzeit

- Diese Folie zeigt, daß die Zahlen seit Ewigkeiten erfolgreich benutzt werden. Man könnte denken, Zahlen waren das erste, was axiomatisch festgelegt wurde. Das ist aber nicht der Fall, die Entwicklung der Axiomatik der Zahlen war erst 1889 abgeschlossen.

# 7. Folie. Axiomatik des Zahlbegriffs

- Man könnte meinen, daß sich die Idee, mathematische Objekte axiomatisch festzulegen, erst in den letzten Jahrhunderten aufkam, vorher war man eher an der erfolgreichen Benutzung interessiert. Dieser Gedanke ist einerseits falsch und andererseits richtig.

  Falsch ist er, weil die Axiomatisierung der Mathematik mit Euklids Elementen vor etwa 2000 Jahren begonnen hatte. Diese Idee Euklids – ausgehend von wenigen Axiomen, das ganze Wissenschaftsgebäude daraus durch logische Schlüsse aufzubauen – war so faszinierend, daß man seit jener Zeit versucht hat, ähnliches in den verschiedensten Bereichen des wissenschaftlichen Denkens zu tun. Als Beispiele seien hierfür Spinozas Ethik [1] und Kants „Kritik der reinen Vernunft“ zu nennen. Aus der Sicht des Autors übrigens beides mißglückte Versuche.

  Richtig ist dieser Gedanke, weil man gerade um die Jahrhundertwende vom 19. zum 20. Jh feststellte, daß die Axiomatik der Mathematik an ihre Grenzen stößt was in der zweiten Grundlagenkrise der Mathematik gipfelte. [2]

  Man kann sagen, daß nach dem Siegeszug der klassischen Mechanik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und den unerwarteten prinzipiellen Problemen in der Physik zu

[1] Spinoza stellt sich sogar explizit das Ziel, die Philosophie nach den Vorbild der Euklidischen Methode zu entwickeln

[2] Mit „zweiter Grundlagenkrise der Mathematik“ ist hier der Streit zwischen Formalismus und Intuitionismus Anfang des 20. Jahrhunderts gemeint (siehe [17]). Ich ergreife in diesem Streit keine Partei. Beide Seiten sind wichtig. Mit der ersten Grundlagenkrise der Mathematik kann man die Entdeckung der irrationalen Zahlen durch die Pythagoräer bezeichnen.

Beginn des 20. Jahrhunderts, das Bewußtsein dafür entstand, daß die durch die Wahrnehmung der materiellen Welt intuitiven Vorstellungen und die durch die gedankliche Durchdringung des Wahrgenommenen entstandenen Ideen nicht ohne weiteres zusammenpassen.

- Besonders hervorzuheben ist das *Jahr der Zahlen 1887*, in dem vier Arbeiten beinahe zum selben Thema entstanden sind. Auf die Artikel von Dedekind und Helmholtz werden wir im weiteren noch eingehen.
- Der Abschluß der Axiomatik zu den Zahlen wurde im Jahre 1889 mit den sogenannten „Peanoschen Axiome“ eingeläutet. Sie stellten die einfachsten der Zahlen, die natürlichen Zahlen auf eine axiomatische Grundlage.
- Wie ist diese Diskrepanz – einerseits die erfolgreiche Benutzung mathematischer Objekte und andererseits die erst späte Fundierung dieser Objekte – überhaupt möglich?
- Zur Literatur siehe [4, 5, 6, 7].

# 8. Folie. Kardinal- und Ordinalzahlen

- Die natürlichen Zahlen kann man sich als Kardinal- und Ordinalzahlen vorstellen.

  In der *wikipedia* lesen wir:

  Eine Kardinalzahl ist eine Darstellung der Mächtigkeit einer endlichen Menge (Mengenaspekt).

  Ordinalzahlen sind die Indizes der Elemente einer Folge auf Wohlordnungen. (Reihenfolgenaspekt.)

- Kardinalzahlen sind sehr intuitiv. Schon sehr kleine Kinder haben eine Vorstellung von den Kardinalzahlen etwa bis zur 7. Sie können auch die eineindeutige Zuordnung von Mengen mit gleicher Kardinalzahlen gut bewerkstelligen (jeder erhält zwei Bonbons, zu jedem Teller einen Löffel auf den Tisch legen).

  Auch die Addition von Kardinalzahlen als Vereinigung disjunkter Mengen ist gut vorstellbar. Die Vorstellung nicht disjunkter Mengen ist übrigens wesentlich schwerer, da sie nur denkbar aber nicht real ist. Ein und dieselbe Kartoffel kann nur in einem Sack liegen.

- Ordinalzahlen als festgelegte Reihenfolge sind auch sehr intuitiv, allerdings kommt man ohne weiteres nicht auf die Idee, mit ihnen zu rechnen (siehe hierzu auch die Paradoxa mit natürlichen Zahlen weiter unten).
- Man könnte meinen, daß die Addition von Kardinalzahlen der Ausgangspunkt der Arithmetik ist. In der Axiomatik ist der Weg aber entgegengesetzt: Als erstes werden Ordinalzahlen festgelegt (Peanosche Axiome, jede Zahl hat einen Nachfolger). Anschließend werden die arithmetischen Operationen (Addition und Multiplikation mit den Rechengesetzen) für Ordinalzahlen definiert.

  Zum Abschluß wird diese Theorie der Ordinalzahlen auf die Kardinalzahlen übertragen, indem man zu jeder Ordinalzahl eine spezielle Menge (ausgehend von der leeren Menge $\emptyset$, die der 0 zugeordnet wird) definiert, die die entsprechende Anzahl von Elementen hat (auf der linken Seite steht die Zahl, die definiert ist als die Kardinalzahl der rechts stehenden

Menge).

$$\begin{aligned}
0 &:= \emptyset \\
1 &:= \{\emptyset\} \\
2 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
&\vdots \\
n+1 &:= n \cup \{n\}
\end{aligned}$$

Induktiv wird aus einer Menge eine neue Menge gebildet, die alle Elemente der Menge und die Menge selbst als Elemente enthält.

Das führt auf eine Widerspruchsfreie Identifizierung von Kardinalzahlen und Ordinalzahlen.

Die Definitionen sind natürlich alles andere als intuitiv. Stellt man sich etwa die leere Menge als leeren Kartoffelsack und die Kardinalzahl 20 als Sack mit 20 Kartoffeln vor, wird man enttäuscht. Der Zahl 20 entspricht ein Sack mit $2^{19} = 524288$ raffiniert ineinandergelegten leeren Säcken.

- Warum ist es so schwer, die natürlichen Zahlen über die intuitiven Kardinalzahlen direkt aus der Anschauung heraus zu definieren?

Die Nähe zur Anschauung führt zum Urproblem der Kardinalzahlen. Man kann sie zwar ordnen (eine Kardinalzahl ist größer, wenn ihr eine Menge mit mehr Elementen entspricht), aber man weiß nicht ob sie lückenlos sind. Fehlende Lückenlosigkeit ist in der Mathematik ein ernsthaftes Problem. Daß es bereits bei Kardinalzahlen auftritt, überrascht vielleicht.

Wenn wir die Kardinalzahlen als Elementeanzahlen von Mengen betrachten, erhalten wir nur solche Zahlen, für die es auch entsprechende Mengen gibt.

Wer sagt uns, daß es eine Menge mit 123456789 Elementen in der physischen Realität tatsächlich gibt. Gedanklich könnte man sich natürlich vorstellen, daß man zu einer Menge Steinchen immer mehr Steinchen dazulegt, bis es genau so viele sind. Wir denken, daß wir so eine Menge konstruieren können. Aber das benutzt letztlich die Zahlen als Ordinalzahlen. Diese Operation – das Hinzulegen von Steinchen – können wir bei so großen Zahlen nämlich nur gedanklich machen. Tatsächlich könnten wir uns auf das Ergebnis nicht verlassen, da wir uns zwischendurch sicher verzählt hätten.

Aber auch bei kleinen Zahlen, die man gut überblicken kann, treten Probleme auf. Wer sagt uns, daß es z.B. keine Menge mit mehr als 5 und weniger als 6 Elementen gibt. Wir haben noch keine gefunden aber wir können uns nicht sicher sein, daß es keine solche Menge gibt. Wir können es empirisch nicht beweisen. So, wie man die Nichtexistenz von etwas überhaupt nicht empirisch beweisen kann.

Man hat den Eindruck, daß man zu einer Menge mit 5 Elementen nicht weniger als ein neues Element dazulegen kann. Aber das benutzt letztlich die Nichtzerlegbarkeit der Eins, was wieder auf die Definition der Ordinalzahlen führt.

Wenn wir zwei Mengen, eine bestehend aus 5 die andere aus 6 Steinchen betrachten. Wir zerbrechen eins der Steinchen der 5-er Menge. Enthält sie jetzt genauso viel wie die 6-er Menge? (Zerbricht man vor den Augen eines kleinen Kindes einen Keks in zwei Teile, denken sie, daß die zwei Teile mehr sind als ein ganzer Keks und nehmen lieber die beiden Teile.)

In der Physik wird übrigens problemlos mit „zerlegbaren Kardinalzahlen“ hantiert.

- Die Ordinalzahlen dagegen sind lückenlos, weil sie lückenlos definiert sind. Nach der 5 kommt die 6 und basta.
- Das Problem mit der Lücke bei den Kardinalzahlen tritt übrigens in aller Schärfe in der Mengentheorie bei der sogenannten *Kontinuumshypothese* hervor.[3] Hier kann man das Problem wegen der fehlenden Anschaulichkeit von unendlichen Mengen auch nicht mehr wegdiskutieren.
- Neben natürlichen Zahlen als Kardinal- und Ordinalzahlen kann man auch (endliche) nicht natürliche Kardinal- und Ordinalzahlen betrachten, an denen die Unterschiede zwischen beiden Typen von Zahlen sehr gut zum Ausdruck kommen. Siehe hierzu [12].

# 9. Folie. Zahlen und Zählen

- Bevor wir das Zählen untersuchen erinnern wir an Cantors Definition einer Menge: *„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung $M$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten $m$ unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen.“*
- In der Natur gibt es nur Unikate (jedes Objekt ist einmalig). Unikate kann man nicht zählen.
- Das Zählen ist eng mit der Dualität von Gleichem und Verschiedenem verbunden:
  - Damit ich zwei Objekte als gleich erkenne müssen sie verschieden sein.
  - Damit ich zwei Objekte als verschieden erkenne müssen sie gleich sein.

  Das ist nicht leicht zu verstehen.

  Um etwas zählen zu können muß ich also als erstes Dinge, die ich zählen will, etwa Steinchen, in einer Menge (physisch oder gedanklich) zusammenfassen. In diesem Sinne, der Zugehörigkeit zu einer Menge, sind sie gleich. Ich benötige als erstes also gleiche Dinge. Um sie jetzt zählen zu können, muß ich sie unterscheiden können, sie müssen also verschieden sein.

  Ich erkenne nicht ein einzelnes Objekt als gleich. Ich kann nur mehrere und damit verschiedene Objekte als gleich erkennen. Ich kann auch ein einzelnes Objekt nicht als verschieden erkennen. Ich kann nur mehrere Objekte, die ich (physisch oder gedanklich) zusammenfasse und in diesem Sinne als gleich betrachte, als verschieden erkennen.

  Ich kann die Unterschiede zwischen zwei Schülern betrachten, weil die beiden Schüler „gleich“ sind. Ich betrachte aber nicht die Unterschiede zwischen einem Schüler und dem

[3] Unter der Kontinuumshypothese versteht nman die Untersuchung folgender Frage: Gibt es eine Menge mit mehr als abzählbar vielen Elementen, die kleiner als das Kontinuum ist? Siehe [18]

Fenster des Klassenraumes. Sie sind zwar auch verschieden, aber das interessiert mich nicht. Ich stecke sie nicht gedanklich in einen Menge.

- Diese Dualität widerspiegelt sich auch in der umgangsprachlichen Redewendung, daß man alzu verschiedene Dinge „nicht vergleichen kann“. Man sollte denken, je verschiedener desto einfacher fällt der Vergleich.
- Die Frage, wann zwei Dinge gleich und wann verschieden sind, hat die Philosophen lange beschäftigt (siehe z.B. [3]) und beschäftigt sie immer noch. Insbesondere ging es meistens darum, wann zwei Objekte *objektiv* gleich sind. Dabei sind sie objektiv stets verschieden, werden nur vom Menschen unter einem bestimmten Aspekt gemeinsam betrachtet.
- Nach der Definition von Cantor, gibt es Mengen mit einem Element und Mengen mit keinem Element, die sogenannte leere Menge, die es in der Mathematik übrigens genau einmal gibt.

  Intuitiv bilde ich natürlich aus einem Objekt (und erst recht nicht aus null Objekten) keine Menge, eben weil ein Objekt weder gleich noch verschieden ist. Sogar der Mathematiker Bolzano betrachtet in [1] auch nur Mengen mit mindestens zwei Elementen.
- Das erklärt, warum die Griechen 1 und 0 nicht als Zahl betrachteten. Und auch Kinder können nicht bis „Eins“ zählen. Die Eins entsteht bei Kindern durch die Subtraktion. Wenn aus einer Tüte Äpfel herausgenommen werden, gibt es einen Moment, in dem nur noch einer darin liegt. Axiomatisch ist der Weg wieder entgegengesetzt. Die 1 ist die Erzeugende der Addition.

  Nimmt man den letzten Apfel auch noch aus der Tüte heraus, ist sie leer. In ihr befinden sich 0 Äpfel. Nicht etwa 0 Kartoffeln, obwohl das aus mathematischer Sicht dasselbe ist.

  In der wikipedia lesen wir (siehe [15]): *Eine Veranschaulichung des Mengenbegriffs, die Richard Dedekind zugeschrieben wird, ist das Bild eines Sackes, der gewisse (als Einzelne abgrenzbare) Dinge enthält. Nützlich ist diese Vorstellung zum Beispiel für die leere Menge: ein leerer Sack. Die leere Menge ist also nicht „nichts“, sondern der Inhalt eines Behältnisses, das keine der für es als Inhalt vorgesehenen Dinge enthält. Das „Behältnis“ selbst verweist nur auf die bestimmte zusammenzufassende Sorte und Art von Elementen.*

  Hier versucht Dedekind das unintuitive der mathematischen Definition intuitiv zu erklären. Natürlich fragt man sich bei einem leeren Sack, was vorher im Sack war. Außerdem ist es das Schicksal jedes Sackes, mit etwas vollgefüllt zu werden. Die leere Menge wird nicht vollgefüllt.
- Ältere Kinder, so ab 3-4 Jahre können zählen, sie können auch die Zahl ihrer Autos abzählen. Aber es interessiert sie nicht. Sie können mit dem Ergebnis – 15 – nichts anfangen. Sie haben keine Beziehung zur Zahl 15.

  Erst viel später, suchen sie z.B. in der Kiste ein spezielles Bauteil mit 8 Löchern.
- Bei Kindern muß man genau beobachten, ob sie tatsächlich abzählen oder ihr Gefühl für kleine Kardinalzahlen – das übrigens auch Tiere haben – benutzen. Wenn sie jedem Kind aus einer Tüte drei Bonbons geben, zählen sie nicht.
- Beim Zählen ist die Reihenfolge nicht wichtig. Sie muß aber (von uns) festgelegt werden.

  Die $10! = 3628800$ möglichen Anordnungen zum Zählen von 10 Objekten liefern alle das selbe Ergebnis.

## 10. Folie. Zählen. Raum und Zeit

- Die Menge, deren Elemente ich zählen will, befindet sich im Raum, sie liegt vor mir. Das Zählen vollzieht sich aber in der Zeit. Damit das klappt, darf sich die Menge in der Zeit also nicht verändern. Zum Zählen muß die Zeit „angehalten“ werden.

  Das hat Spengler sehr schön beschrieben.
- Der Kontext, in dem das Zitat bei Spengler vorkommt ist folgender:

  *Damit ist auch das allverbreitete Mißverständnis widerlegt, welches die Zeit mit der Arithmetik, den Raum mit der Geometrie in eine oberflächliche Verbindung bringt, ein Irrtum, dem Kant nicht hätte erliegen sollen, wenn man auch von Schopenhauers Verständnislosigkeit für Mathematik kaum etwas anderes erwartet. Weil der lebendige Akt des Zählens mit der Zeit irgendwie in Beziehung steht, hat man immer wieder Zahl und Zeit vermengt. Aber Zählen ist keine Zahl, so wenig als Zeichnen eine Zeichnung ist. Zählen und Zeichnen sind ein Werden, Zahlen und Figuren sind Gewordnes. Kant und die andern haben dort den lebendigen Akt (das Zählen), hier dessen Ergebnis (die Verhältnisse der fertigen Figur) ins Auge gefaßt. Aber das eine gehört in den Bereich des Lebens und der Zeit, das andre in den der Ausdehnung und Kausalität. Daß ich rechne, unterliegt der organischen, was ich rechne, der anorganischen Logik. Die gesamte Mathematik, volkstümlich gesprochen also Arithmetik und Geometrie, beantwortet das Wie und Was, die Frage also nach der natürlichen Ordnung der Dinge. Im Gegensatz dazu steht die Frage nach dem Wann der Dinge, die spezifisch historische Frage, die nach dem Schicksal, der Zukunft, der Vergangenheit. All das liegt in dem Worte Zeitrechnung, das der naive Mensch vollkommen unzweideutig versteht.*
- Die Identifizierung von Kardinal- und Ordinalzahlen ist also nur bei angehaltener Zeit möglich. Jegliche zeitlich veränderlichen Prozesse können zwar mit Zahlen beschrieben werden, aber die Identifizierung kann zu Fehlern führen.
- Die Identifizierung von Kardinal- und Ordinalzahlen zieht sich als roter Faden durch die ganze Mathematik. Diese Identifizierung wird auf höherem Niveau je nach Notwendigkeit wieder aufgehoben. Sie widerspiegelt sich beispielsweise im Unterschied zwischen stetigen Funktionen (Ordinalzahlen) und Maßen (Kardinalzahlen). Und im Unterschied zwischen Ableitung (Differenz von Ordinalzahlen) und der Radon-Nikodym-Ableitung (Differenz von Kardinalzahlen).
- Oft fehlt eine klare Abgrenzung zwischen Raum und Zeit, in der sich alle realen Prozesse der physischen Welt abspielen, einerseits und Raum-Zeit-Losigkeit, die für die Prozesse der geistigen Welt typisch sind.

  Mathematik spielt sich immer außerhalb von Raum und Zeit ab. Wir kommen durch mathematische Überlegungen nie zu einer Erkenntnis von Raum und Zeit. Um Raum und Zeit zu verstehen, müssen wir untersuchen, welche Rolle sie bei der Wahrnehmung von Objekten spielen. In dem Augenblick, in dem ich über Raum und Zeit theoretisiere, befinde ich mich bereits außerhalb davon.

## 11. Folie. Paradoxa mit natürlichen Zahlen

- Mit Zahlen kann man rechnen, wenn man sich an die Rechengesetze hält macht man keinen Fehler, erhält stets ein richtiges Resultat. Aber ist es auch sinnvoll? Sollte man alles tun, was man darf?

- Ein weiteres Paradoxon, das zwei der angeführten in einem vereinigt ist folgendes:

  Der Regenmesser im Garten zeigte gestern 10 mm und heute 15 mm. Kann ich die Zahlen addieren? Das hängt davon ab, ob jemand den Regenmesser zwischenzeitlich geleert hat. Wenn ja, dann kann ich die Zahlen addieren (sie geben die Regenmenge der letzten beiden Tage an), wenn nicht, dann ist die Addition der Zahlen sinnlos. Ich benötige also eine zusätzliche Information, um die Frage zu entscheiden. Wurde der Regenmesser nicht geleert, haben wir es mit einem kausalen Zusammenhang zu tun, wenn doch, dann nicht.

  Dieses einfache Beispiel illustriert ein viel schwerwiegenderes Problem, das in der höheren Mathematik bei der Herleitung von Bilanzgleichungen auftritt. Siehe [12, Folien 2,3].

- Die Unterschiede zwischen Kardinal- und Ordinalzahlen machen sich auch bei der Multiplikation bemerkbar. Siehe hierzu [12, Folie 17].

# 12. Folie. Zusammenfassung. Natürliche Zahlen

Wir fassen die Erkenntnisse aus den angeführten Beispielen zusammen:

- Daß die Differenz zweier Ordinalzahlen eine Kardinalzahl ist, wird ständig verwendet. Wir können nämlich mit einer beliebigen Ordinalzahlen anfangen zu zählen und müssen dann zur Bestimmung der Kardinalzahl die Differenz beider Ordinalzahlen bilden.

  Dasselbe passiert, wenn wir eine Länge (extensive Größe, Kardinalzahl) durch Messung mit einem Lineal bestimmen indem wir End- und Anfangspunkte subtrahieren, wenn der Anfangspunkt niicht die 0 war.

- Der Unterschied zwischen Zeitverhältnis und Kausalität ist gerade in der Modellierung wichtig. Zeitpunkte von kausal abhängenden Ereignissen, kann ich nicht gemeinsam im selben mathematischen Raum betrachten sondern muß gegebenenfalls für jeden Zeitpunkt einen eigenen mathematischen Raum wählen.

  Das ist z.B. wichtig bei der Beschreibung von Bewegung. Ich kann die Punkte einer Bahnkurve im selben Raum betrachten (mir aufzeichnen). Der kausale Zusammenhang der Punkte wird durch die Geschwindigkeit vermittelt, die ich natürlich nicht zusammen mit den Punkten in ein Bild zeichnen kann.

- Sehr gut hat Steiner beschrieben, was Kausalität ist. Allerdings benutzt er den Begriff „Zeitverhältnis" so wie ich den Begriff „Kausalität" verwende.

  R. Steiner: *Ist das Dasein von B ein solches, dass es das Dasein von A ausschließt und doch von ihm seinem Wesen nach abhängig ist, dann müssen A und B in einem Zeitverhältnis stehen. Denn die Abhängigkeit des B von A bedingt, wenn man sich gleichzeitig vorstellt, dass das Dasein von B jenes von A ausschließt, dass dies letztere dem ersteren vorangeht.*

  Ich trenne zwischen den Begriffen Zeitverhältnis und Kausalität, weil auch Ereignisse, die keinen Kausalzusammenhang haben in einem Zeitverhältnis stehen können. Die Zeit „läuft" im Hintergrund weiter, weil alle Prozesse in die Welt eingebettet sind.

  Wir können den Kausalzusammenhang manchmal nicht verstehen, und sehen nur das Zeitverhältnis.

# 13. Folie. Zusammenfassung. Vorsicht bei ...

- Vereinheitlichung, Identifizierung und Faktorisierung sind wichtige und sehr erfolgreiche Methoden bei der Entwicklung der Theorie. Sie erschweren unter Umständen aber die Anwendung der Theorie, d.h. die Bereiche der Realität, für die man die Theorie anwenden kann, müssen diese Identifizierung der Objekte zulassen.
- Die Interpretation von Raum und Zeit war über die Jahrtausende ein wichtiges Thema in der Philosophie und ist bis heute nicht abgeschlossen.

# 14. Folie. An der vordersten Front der Wissenschaft

Die Ansicht: „Vorsicht bei Vereinheitlichung“ und „wer weiß schon, was Raum und Zeit sind“. passen nicht ganz in den Zeitgeist.

- Passend zum Thema sind doch tatsächlich die beiden aktuellen (April- und Maiheft) Ausgaben des Spektrum der Wissenschaft. Die Titelstories beider Hefte beschreiben gerade das, was ich hier einer kritischen Analyse unterziehe.
- Das Aprilheft lobt die Vereinheitlichung und verspricht nicht weniger als die „Weltformel“. (Ich schätze die zitierten Autoren des Artikels sehr!)
- Das Maiheft klärt uns darüber auf, daß uns mathematische Modelle nicht mehr und nicht weniger erklären als den Ursprung von Raum und Zeit.

# 15. Folie. Der Weg zu den reellen Zahlen

- Wir setzen hier voraus, daß die Methode der Zahlbereichserweiterungen bekannt sind. Ausführlicher ist dieses Thema im Schülervortrag [13, Folien 3, 4] behandelt.

  Wichtig ist, daß durch die üblichen Zahlbereichserweiterungen $\mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{Z} \Longrightarrow \mathbb{Q}$ durch Einführung neuer Zahlen, die Gleichungen lösbar machen sollen, stets nur *abzählbar viele* neue Zahlen entstehen. Der kanonische Schritt von den rationalen Zahlen zu Zahlen wie $\sqrt{2}$ wäre die Einführung der algebraischen Zahlen.

  Aber auch diese Zahlen enthalten noch Lücken und haben nichts mit den Punkte auf der „Zahlengeraden“ zu tun (außer, daß sie vereinzelt drauf liegen).
- Die Mächtigkeit von Mengen (abzählbar viele, über abzählbar viele, Kontinuum) wurde ausführlicher in [13, Folien 5-10] behandelt.

# 16. Folie. Dedekind. Was sind Zahlen. (1887)

- Der Grund für die Einführung der reellen Zahlen, war der „Wunsch“, Punkte und Zahlen zu identifizieren.

  Dedekind spricht wie selbstverständlich davon („... was doch der Wunsch ist ...“). Diesen „Wunsch“ verspürten die Griechen nicht. Erst mit dem Siegeszug der analytischen Geometrie und der damit möglichen klassischen Mechanik, kam dieser „Wunsch“ auf.

# 17. Folie. Paradoxa mit reellen Zahlen

- Die Ursache aller dieser Paradoxa besteht darin, daß man die überabzählbar vielen Punkte des Kontinuums mit Zahlen beschreiben will, von denen man aber in der Realität nur mit abzählbar vielen zu tun haben kann.
- Es könnte die Meinung aufkommen, daß es überhaupt unintuitiv ist, von unendlichen Mengen zu sprechen. Das ist aber nicht der Fall. Natürlich treffen wir (und alle Menschen aller Zeiten zusammen) im Leben nur endlich viel Zahlen, Meßergebnisse, geometrischen Figuren usw. an. Es ist für uns aber gut vorstellbar, daß wir ausgehend von unserem heutigen Wissensstand morgen auch wieder Neues, z.B. bis jetzt unbekannte Zahlen treffen. Diese Vorstellung, des im Prinzip sich stets erweiternden Wissensstandes beschreibt gerade die abzählbare Unendlichkeit.

  Genau das hat Euklid in seinem berühmten Beweis, daß es „unendlich" viele Primzahlen gibt, getan. Er beweist nämlich wörtlich folgenden Satz:

  *Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.*

  Man sollte vielelicht anstelle von „unendlich" wie Euklid „mehr als alles bisher Bekannte" sagen.
- Die klassische Methode zum Beweis für abzählbar viele Zahlen ist die „Methode der vollständigen Induktion". Als Schüler stellt man sich diese Methode oft so vor: Mich interessiert die Aussage eigentlich für eine feste Zahl $n$. Ich beweise das, indem ich mich Schritt für Schritt bis zu dieser Zahl herantaste.
- Reelle Zahlen sind a priori immer verschieden. Eine mögliche Gleichheit ist etwas ganz besonderes. Das kann man nicht algorithmisch beweisen.

# 18. Folie. Das Banach-Tarski-Paradoxon

- Siehe z.B. wikipedia [16]
- Die Idee des Auswahlaxioms ist es, die Methode der vollständigen Induktion auf das Kontinuum zu übertragen, mit allen sich daraus ergebenden Paradoxa.

  Das Auswahlaxioms ist unter Mathematikern durchaus umstritten. Es gibt dazu folgenden Spruch: Wir wissen,

  - daß das Zornsche Lemma wahr ist;
  - daß das Auswahlaxioms wahr oder falsch ist;
  - daß der Wohlordnungssatz falsch ist.

  Alle drei Aussagen sind mathematisch äquivalent aber eben verschieden intuitiv.

# 19. Folie. Helmholtz. Zählen und Messen (1887)

- Die Paradoxa mit reellen Zahlen könnten den Eindruck erwecken, daß es zwar abzählbar Vieles gibt, aber kein Kontinuum. Aber das Kontinuum ist durchaus real. Wir nehmen nicht nur ein geometrisches Objekt (Strecke, Kreis, Kugel) als Kontinuum wahr, sondern auch vielen andere physikalische Größen wie Tonhöhe, Temperatur, Intensitäten. Wir stellen, wenn sich die Temperatur eines Körpers langsam erhöht nicht zwischendurch fest, daß wir keine Temperatur spüren. Die Temperatur ist stetig, hat keine Lücken. Die Temperatur und macht übrigens auch keine Sprünge, weshalb das Kontinuum auch als „stetig“ angenommen wird (siehe das Zitat von Dedekind auf Folie 16).

Ob die Größen bei ganz großer Auflösung immer noch kontinuierlich sind oder – wie die aktuelle Vermutung der Theorie ist – schließlich diskret, gequantelt werden, ist für unsere Vorstellung davon erst einmal unerheblich. Intuitiv werden die Größen als kontinuierlich wahrgenommen.

- Helmholtz beginnt seinen Artikel mit den Worten

  *Obgleich Zählen und Messen die Grundlagen der fruchtbarsten, sichersten und genauesten wissenschaftlichen Methoden sind, die wir überhaupt kennen, so ist über die erkenntnistheoretischen Grundlagen derselben doch verhältnismäßig wenig gearbeitet worden.*

  Dabei bemerkt er nicht, daß es sich beim Zählen um diskrete Objekte und beim Messen um kontinuierliche Größen – nur solche interessieren Helmholtz in seinem Artikel – handelt, die eben *nicht* gezählt werden können. Nur die Zeit wird tatsächlich nach wie vor gemessen, indem periodische Vorgänge *gezählt* werden. Die Zeit wird nicht mit einem Normmaß verglichen.

- Helmholtz stellt sich die Frage, ob die reellen Zahlen zur Beschreibung von physikalischen Meßergebnissen geeignet sind. Er kommt zum Schluß, daß das der Fall ist. Man muß sich nur auf Meßgeräte beschränken, die exakte Werte liefern, also auf solche, die zwei „verschiedene“ Größen stets unterscheiden können.

  Insbesondere schreibt er: *Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, sind sie unter sich gleich.*

  Das ist das erste Axiom bei Euklid und damit das erste Axiom der Menschheit überhaupt. Es ist richtig für gedachte Objekte wie Zahlen aber nicht für physikalische Größen. Aber Helmholtz fordert diese Eigenschaft auch für die Größen:

  *Das sind Forderungen, die wir an die betreffende Methode der Vergleichung zu stellen haben. Nur solche Verfahrungsweisen sind im Stande, Gleichheit zu erweisen, welche die genannten Forderungen erfüllen.*

  Genau diese Forderung kann ein physikalisches Meßverfahren, das kontinuierliche Größen mißt, nicht erfüllen und wird es auch nie erfüllen können.

  Diskrete Größen dagegen kann man natürlich exakt messen. So kann man anstelle des Messens der Masse einer Probe die Anzahl der Atome in dieser Probe abzählen.

  Heute geht man tatsächlich dazu über. Es wird die Masse über die Anzahl der Atome definiert, und nicht mehr über ein „Urkilogramm“ (siehe [19]).

- Die bessere Interpretation von Meßergebnissen wäre die als „Enthaltensein in offenen Mengen“. Damit beschäftigt sich das Teilgebiet der Mathematik, die Topologie. Ein topologischer Zugang zu physikalischen Größen hat außer der Auflösung dieses Paradoxons noch viele andere Vorteile und stellt aus meiner Sicht den kanonischen Zugang der Mathematik zur (klassischen) Physik dar. Siehe hierzu den Schülervortrag [13, Folie 18] oder die Vorlesung [14].

## 20. Folie. Zahlen als physikalische Größen

- Wir haben nur eine Sorte Zahlen, aber zwei verschiedene Typen von physikalischen Größen, denen wir gern Zahlen zuordnen wollen, *intensive* und *extensive* (siehe [11]).

  Intensive Größen ähneln eher Ordinalzahlen, extensive Größen eher Kardinalzahlen.
- Alter Witz: Im Zimmer sind 20°C, draußen sind 4°C. „Mach das Fenster auf und laß die 4°C auch noch rein.“

## 21. Folie. Zusammenfassung Was wird durch die Axiomatik nicht berücksichtigt

## 22. Folie. Tips für den Matheunterricht (mehr Intuition)

## 23 Literatur

## Literatur

[1] B. Bolzano. *Paradoxien des Unendlichen*

[2] G. Cantor. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* In: Mathematische Annalen. Band 46, S. 481.

[3] G. Frege, *Über Sinn und Bedeutung.*

[4] H. von Helmholtz. *Zählen und Messen.*

[5] R. Dedekind. *Was sind Zahlen.*

[6] E. Husserl. *Über den Begriff der Zahl.*

[7] L. Kronecker. *Über den Zahlbegriff.*

[8] J. Piaget. *Die Entwicklung des Erkennens I. Das mathematische Denken.*

[9] J. Piaget, A. Szeminska. *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*

[10] J. Piaget, B. Inhelder. *Die Entwicklung der physikalisichen Mengenbegriffe beim Kinde*

[11] H. Stephan. *Die Multiplikation als Dualität in Mathematik, Physik und Erkenntnistheorie.* Vortrag für Lehrer zum Tag der Mathematik 2016. https://www.wias-berlin.de/people/stephan/v300416-folien.pdf

[12] H. Stephan. *Endliche Kardinal- und Ordinalszahlen.* Vortrag für Lehrer zum Tag der Mathematik 2018. https://www.wias-berlin.de/people/stephan/v220418-folien.pdf

[13] H. Stephan. *Was sind Zahlen? Paradoxa mit reellen Zahlen.* Vortrag für Schüler zum Tag der Mathematik 2022. https://www.wias-berlin.de/people/stephan/v300422s-folien.pdf

[14] H. Stephan. *Der Zustandraum als kompakter Hausdorffraum.* https://www.wias-berlin.de/people/stephan/funkana5-4.pdf

[15] Wikipedia: Menge.
https://de.wikipedia.org/wiki/Menge_(Mathematik)

[16] Wikipedia: Banach-Tarski-Paradoxon.
https://de.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski-Paradoxon

[17] Wikipedia: Grundlagenkrise der Mathematik.
https://de.wikipedia.org/wiki/Grundlagenkrise_der_Mathematik

[18] Wikipedia: Kontinuumshypothese.
https://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumshypothese

[19] Wikipedia: Urkilogramm.
https://de.wikipedia.org/wiki/Kilogramm#Urkilogramm