

Denkblockaden und mathematische Paradoxa

HOLGER STEPHAN

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

Lange Nacht der Wissenschaften
24. Juni 2017

Der Chef erhöht das Durchschnittsgehalt

	Abteilung 1	Abteilung 2
Durchschnittsgehalt (vorher)	3000	5000
Durchschnittsgehalt (danach)	3250	5500

	Abteilung 1	Abteilung 2
Gehälter (vorher)	4000	6000
	3000	5000
	2000	4000
Durchschnittsgehalt (vorher)	3000	5000

Der Chef erhöht das Durchschnittsgehalt

	Abteilung 1	Abteilung 2
Gehälter (vorher)	4000	6000
	3000	5000
	2000	4000
Durchschnittsgehalt (vorher)	3000	5000

	Abteilung 1	Abteilung 2
Gehälter (danach)	4000	6000
	4000	5000
	3000	
	2000	
Durchschnittsgehalt (danach)	3250	5500



Weitere "Anwendungsbeispiele" der Methode

- ▶ Manipulierte Wirtschaftsdaten (die Arbeitslosigkeit sinkt)
- ▶ Zurechtschneiden von Wahlbezirken (bei Direktwahl):
Eine andere Partei gewinnt die Wahl, obwohl alle Wähler genauso wie beim letzten Mal gestimmt haben.

Die überraschende Mathearbeit

- ▶ Mathelehrer: "Wir schreiben nächste Woche eine Mathearbeit, aber ich sage nicht, an welchem Tag. Sie kommt überraschend."
- ▶ Überraschend heißt: Die Wahrscheinlichkeit ist nicht $= 1$.
- ▶ Wenn Donnerstag die Arbeit noch nicht geschrieben wurde, muß sie Freitag geschrieben werden.
Dann kommt sie aber nicht mehr überraschend.
 \implies Freitag kann es nicht sein. Es bleiben die Tage Mo – Do.
- ▶ Wenn Mittwoch die Arbeit noch nicht geschrieben wurde, muß sie Donnerstag geschrieben werden, denn der Freitag scheidet aus. Dann ist sie aber nicht überraschend. \implies Donnerstag kann es auch nicht sein. Es bleiben die Tage Mo – Mi.
- ▶ Usw. So scheidet jeder Tag aus. Die Mathearbeit kann also überhaupt nicht geschrieben werden.
- ▶ Plötzlich (z.B. am Mittwoch) sagt der Mathelehrer: Blätter raus, wir schreiben die Mathearbeit. Und alle sind überrascht.

Was ist ein Paradoxon

- ▶ Paradoxon (Plural Paradoxa) = Paradoxa sind reale oder scheinbare logische Widersprüche.
- ▶ Man geht von scheinbar wahren Aussagen aus, macht scheinbar erlaubte logische Schlüsse und kommt zu Schlußfolgerungen, die absurd sind, etwa weil sie den ursprünglichen Annahmen widersprechen.
- ▶ Gibt es seit Jahrtausenden zur Schulung des Denkens
 - ▶ Zenon von Elea: Achilles und die Schildkröte
 - ▶ Zenon von Elea: Pfeil-Paradoxon
- ▶ Paradoxa sind immer ein Hinweis auf Unverstandenes: Hierüber sollte ich nochmal nachdenken.

Verwendungszweck von Paradoxa

- ▶ Vorsatz: Paradoxa sollen Verwirrung stiften und dienen der Manipulation der Menschen.
- ▶ Aufklärung: Paradoxa sollen die Menschen auf Unverstandenes hinweisen.
- ▶ Spaß I: Paradoxa als Knobelaufgaben.
- ▶ Spaß II: Irreführung ohne böse Absichten.

Frage: Wo steckt der Fehler?

In den Voraussetzungen oder in den Schlüssen.

Häufig akzeptiert man Fehler in den Schlüssen (man kann sich ja mal täuschen), aber nimmt an, daß die Voraussetzungen wahr waren. Da man häufig in den Schlüssen den Fehler nicht findet, bleibt nur Verzweiflung.

Wie funktionieren Paradoxa?

- ▶ Unklare Begriffe oder Verwendung von Begriffen, unter denen verschiedene Menschen Verschiedenes verstehen.
- ▶ Unterschiede zwischen Mathematik und gesundem Menschenverstand. Oder: Unterschied zwischen mathematischer und intuitiver Logik.
Diese Unterschiede zeigen die Grenzen der Anwendbarkeit der Mathematik auf.
- ▶ Benutzung von mathematischen Begriffen im falschen Kontext.

Achtung: Falsche Schlüsse können richtige Ergebnisse liefern. Ein richtiges Ergebnis zeigt nicht, daß man das Problem verstanden hat.

Mathematische oder intuitive Logik

- ▶ Beispiel: "Ich lüge immer."
- ▶ Scheint ein Widerspruch zu sein. Ist es aber nicht.
- ▶ In der mathematischen Logik haben alle Aussagen einen Wahrheitswert.
- ▶ \implies Der Satz ist keine Aussage.

Die Regel vom ausgeschlossenen Dritten.

- ▶ Regel: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.
- ▶ Regel: Die Verneinung eines Satzes hat den entgegengesetzten Wahrheitswert.
- ▶ Wahre Aussage:
Dieser Satz besteht aus sechs Wörtern.
- ▶ Verneinung = falsche Aussage?
Dieser Satz besteht nicht aus sechs Wörtern.
- ▶ \implies Die Verneinung ist keine mathematische Verneinung.

Logik und induktive Erkenntnis

- ▶ Die Aussage $A \rightarrow B$ ("Wenn es regnet ist die Straße naß.") ist äquivalent zur Aussage: "Nicht $B \rightarrow$ Nicht A ." ("Wenn die Straße nicht naß ist, regnet es nicht.")
- ▶ Theorie: Alle Raben sind schwarz.
Jeder schwarze Rabe, bestätigt meine Theorie.
- ▶ Äquivalent: Alles was nicht schwarz ist, kann kein Rabe sein.
- ▶ Jedes gelbe Auto, jeder blaue Pullover, ... bestätigen die Theorie?
- ▶ Eine Theorie ist nicht wahr, weil sie durch viele Beispiele bestätigt ist, sondern weil sie begründet ist.
- ▶ Beispiel: Warum gibt es kein Perpetuum mobile?
- ▶ Weil wir schon oft keins gesehen haben?
- ▶ Nein, weil der Energieerhaltungssatz gilt.
- ▶ Die Nichtexistenz kann man nicht empirisch zeigen!
- ▶ \implies Fehler im Verständnis der Induktion. Man man irrt sich, wenn man denkt, Wissen ist induktiv erzeugt.

Optische und logische Täuschung

- ▶ Bild: Optische Täuschungen
- ▶ Bild: Maurits Cornelis Escher: Relativität
- ▶ Bild: Maurits Cornelis Escher: Belvedere
- ▶ Bild: Maurits Cornelis Escher: Treppauf, treppab.

Das logische Denken als Erkenntnisorgan

- ▶ Wir wissen, daß es optische Täuschungen gibt. Das allein zeigt, daß wir uns nicht an der Nase herumführen lassen müssen. Wenn wir optischen Täuschungen zwangsausgeliefert wären, würden wir sie nicht als solche erkennen und überwinden.
- ▶ Weil wir wissen, daß es logische Täuschungen gibt, können wir sie auch erkennen.
- ▶ Das logische Denken setzt die einzelnen Wahrnehmungen der Sinnesorgane zu einem Weltbild zusammen.
- ▶ Die Wahrheit ist immer logisch. Man kann sich – wenn man sich an die Wahrheit hält – nicht in Widersprüche verstricken. Und umgekehrt: Wenn irgendetwas unlogisch ist, dann stimmt da was nicht!

Paradoxon verstanden?

- ▶ Viele Paradoxa zählen als verstanden, weil die Verwunderung verschwunden ist.
Dabei hat man sich nur an das Unverstandene gewöhnt.
- ▶ Beispiel: Achilles und die Schildkröte
(Grenzwertbegriff, reelle Zahlen)
- ▶ Niels Bohr: Gute Physik ist, ausgehend von falschen Voraussetzungen durch fehlerhafte Schlüsse zu richtigen Ergebnisse zu gelangen.

Richtige Ergebnisse durch falsche Schlüsse?

$$\frac{1388875}{5788831} = \frac{1388\cancel{8}75}{5788\cancel{8}31} = \frac{138\cancel{88}75}{578\cancel{88}31} = \frac{13\cancel{888}75}{57\cancel{888}31} = \frac{1375}{5731} = 0,239923\dots$$

$$\frac{5^3 + 3^3}{5^3 + 2^3} = \frac{125 + 27}{125 + 8} = \frac{152}{133} = \frac{19 \cdot 8}{19 \cdot 7} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{5^3 + 3^3}{5^3 + 2^3} = \frac{5^{\cancel{3}} + 3^{\cancel{3}}}{5^{\cancel{3}} + 2^{\cancel{3}}} = \frac{5 + 3}{5 + 2} = \frac{8}{7}$$

Beweis:

$$\frac{(a+b)^3 + a^3}{(a+b)^3 + b^3} = \frac{((a+b) + a)(a^2 + ab + b^2)}{((a+b) + b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{(a+b) + a}{(a+b) + b}$$

Ungewöhnliche "Bruchrechnung"

$$\frac{121 - 64}{55 + 40} = \frac{121}{55} - \frac{64}{40}$$

weil

$$\frac{121 - 64}{55 + 40} = \frac{57}{95} = \frac{3}{5} = 0.6, \quad \frac{121}{55} = \frac{11}{5} = 2.2, \quad \frac{64}{40} = \frac{8}{5} = 1.6$$

Dagegen hat durchaus folgende Addition Sinn:

$$\frac{2}{3} \oplus \frac{4}{5} = \frac{2+4}{3+5} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

67%-iger + 80%-iger = 75%-iger, falls es 3 und 5 Liter waren.

Was sind reelle Zahlen?

- ▶ $\sqrt{2} = 1,41421\dots$, $\pi = 3,14159\dots$, $e = 2,71828\dots$
- ▶ Wann sind zwei reelle Zahlen gleich oder ungleich?
- ▶ Ist $e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768744$, eine ganze Zahl?
- ▶ $262537412640768744 - e^{\pi\sqrt{163}} = 0,00000000000074992740\dots$
- ▶ Ist $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$? $\sqrt{2} - 1 = 0,41421\dots$, $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 0,41421\dots$

$$\text{Beweis: } \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$$

- ▶ Ist $\tan 7.5^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$?

Das Banach-Tarski-Paradoxon

Eine Kugel kann in endlich viele Teile zerlegt werden, aus denen sich zwei Kugeln jeweils von der Größe des Originals zusammensetzen lassen (Beweis mit Auswahlaxiom).



Dieses Paradoxon demonstriert:

- ▶ Eine Kugel ist keine "Punktmenge".
- ▶ Mathematisches Volumen \neq intuitives Volumen
- ▶ Allgemein: Die Mathematik spiegelt die Realität nicht "trivialerweise" wieder.

Der Krankheitstest

- ▶ In der Bevölkerung hat 1 Person von 1000 die Krankheit X.
- ▶ Es gibt einen Test für diese Krankheit, der positiv (wahrscheinlich krank) oder negativ (gesund) ausgehen kann.
- ▶ Der Test liefert 5% falsch positive Ergebnisse, d.h., 5% der getesteten werden als krank erkannt, sind aber gesund.
- ▶ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person, die positiv getestet wurde auch wirklich krank ist? 95%?

positiv + krank	1 Personen
positiv + gesund	50 Personen
negativ + gesund	945 Personen
getestet insgesamt	1000 Personen

Nur $1/51 = 1,9\% < 2\%$ sind tatsächlich krank.

- ▶ Wie gut muß ein Test sein, damit ich bei positivem Test zu 50% krank bin? Er darf nur 0,1% falsch positive Ergebnisse liefern.

Verschiedenes

- ▶ Drei-Türen-Problem
- ▶ Haben Frauen oder Männer mehr Brüder?
- ▶ Das Großvaterparadoxon
- ▶ 1 kg Beeren haben einen Wassergehalt von 99%, nach einer Weile ist der Wassergehalt auf 98% gesunken.
Wieviel wiegen die Beeren jetzt?
Antwort: 500g
- ▶ Warum vertauscht ein Spiegel links und rechts und nicht oben und unten?
- ▶ Warum erinnern wir uns an die Vergangenheit und nicht an die Zukunft?