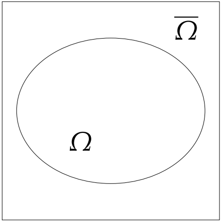
Endliche Kardinal- und Ordinalzahlen

Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

23. Tag der Mathematik
21. April 2018, Technische Universität Berlin

Modellierung physikalischer Prozesse



Herleitung einer Bilanzgleichung

Frage: Wie ändert sich die physikalische Größe M im Raumgebiet Ω mit der Zeit?

- 2 Zeitpunkte $t_1 < t_2$. $\Delta t = t_2 - t_1$
- Physikalische Größe M in Ω zu einem Zeitpunkt.
- Die Ursache für die Änderung: Strom S zwischen Ω und $\overline{\Omega}$

$$M(\Omega, t_2) - M(\Omega, t_1) = S(\overline{\Omega} \to \Omega, \Delta t) - S(\Omega \to \overline{\Omega}, \Delta t)$$

Es ändert sich eine Größe in der Zeit,
weil sie sich im Raum bewegt,
weil eine andere Größe im Raum variiert.

Was muß beachtet werden?

$$M(\Omega, t_2) - M(\Omega, t_1) = S(\overline{\Omega} \to \Omega, \Delta t) - S(\Omega \to \overline{\Omega}, \Delta t)$$

- Was ist eine Stoffmenge?
- Was kann strömen?
- Warum strömt/bewegt sich etwas?
- Was darf man subtrahieren?
- Was existiert zum Zeitpunkt?
- Was strömt/bewegt sich in einem Zeitraum?
- Mit Zahlen ist alles erlaubt, mit physikalischen Größen nicht.

Ethische Grundsätze der Modellierung:

$\Longrightarrow$ Man darf nicht alles tun, was man kann.

$\Longrightarrow$ Man sollte nicht alles tun, was erlaubt ist.

Kardinal- und Ordinalzahlen

- Zahlen kann man als Kardinal- oder Ordinalzahlen interpretieren.
- Kardinalzahlen (*wikipedia*): Eine Kardinalzahl ist eine Darstellung der Mächtigkeit einer endlichen Menge. (Mengenaspekt.)
- Wozu brauche ich Kardinalzahlen? Um Mengen zu vergleichen.
- Ordinalzahlen (*wikipedia*): Sind die Indizes der Elemente einer Folge auf Wohlordnungen. (Reihenfolgenaspekt.)
- Wozu brauche ich Ordinalzahlen? Um festzustellen, das wievielte Glied in einer Folge ein gegebenes Objekt ist.
- Zählen benutzt die Identität von Kardinal- und Ordinalzahlen.

Übersicht des Vortrages

- Merkwürdigkeiten mit Zahlen in der Geschichte.
- Wie entwickeln Kinder ein Zahlengefühl?
- Unterschiede zwischen Kardinal- und Ordinalzahlen.
- Axiomatische Identifizierung von Kardinal- und Ordinalzahlen in der Mathematik.
- Zahlenbereichserweiterungen ohne Identifizierung.

Zahlen in der Geschichte

- Ägypter kannten nur Stammbrüche:
  $1/5 + 1/6$ waren nicht $11/30$.
- Griechen kannten (natürliche) Zahlen, Größen und Verhältnisse.
  Die 1 zählte nicht als Zahl
- Kaum ein Mensch konnte zählen. Warum auch.
- Probleme mit negativen Zahlen gab es sehr lange.
  Leibniz: Wenn $a > b$ und $c < d$, dann ist $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.
  Warum ist dann $\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$.

Zwei Kopfrechenaufgaben

1) Aufgabe: Wieviel ist 25% von 24 ?
2) Aufgabe: Wieviel ist 24% von 25 ?

- Die Multiplikation ist kommutativ, aber gefühlt nichtkommutativ.

$$25\% \text{ von } 24 = \frac{25}{100} \cdot 24 = \frac{25 \cdot 24}{100} = \frac{24 \cdot 25}{100} = \frac{24}{100} \cdot 25 = 24\% \text{ von } 25$$

- Warum ist die Kommutativität der Multiplikation nicht intuitiv?

Zahlen und Kinder I

- Wir sehen zwei Busse mit den Nummern 7 und 12.
  Was ist die Summe?
- Geschwindigkeiten: Wir fahren 2 Stunden mit 60 km/h und 3 Stunden mit 100 km/h.
  Kann man die Geschwindigkeiten addieren?
- Beim 100m-Lauf war Paul 2. und Fritz 5.
  Was ist $5 + 2$?
  Was ist $5 - 2$?

$\Longrightarrow$ Ordinalzahlen darf man nicht addieren.

$\Longrightarrow$ Ordinalzahlen darf man subtrahieren.
Differenz ist eine Kardinalzahl.

$\Longrightarrow$ Ordinalzahlen sind intensive Größen?

Zahlen und Kinder II

- Es liegen 3 Äpfel und 4 Birnen auf dem Tisch.
  Was ist das zusammen?
  Mögliche Antworten: a) 7; b) Geht nicht; c) 7 Früchte.

$\Longrightarrow$ Kardinalzahlen mit verschiedenen Einheiten darf man unter Umständen addieren.

- Paul hat an zwei Tagen drei Bonbons erhalten,
  ich an drei Tagen nur zwei. Das ist ungerecht.

- Es steht ein runder und ein rechteckiger Kuchen auf dem Tisch.
  Jemand erhält von einem $1/5$ und vom andern $1/6$.
  Hat er jetzt $1/5 + 1/6 = 11/30$ Kuchen erhalten?

$\Longrightarrow$ Vorsicht beim Addieren von Brüchen!

Zahlen und Kinder III

- Papa hat ein Auto mit 7 Sitzen, Opa eins mit 5 Sitzen.
  Wieviel Menschen können gemeinsam wegfahren.
  $5 + 7 = 12$ ist eine sinnvolle Aufgabe.
- Wir hatten früher ein Auto mit 5 Sitzen. Das haben wir verschrottet und uns ein neues mit 7 Sitzen gekauft.
  $5 + 7$ ist keine sinnvolle Aufgabe. Warum?
  $7 - 5$ ist eine sinnvolle Aufgabe.

$\Longrightarrow$ Kardinalzahlen zu verschiedenen Zeitpunkten darf man nicht addieren aber subtrahieren.

- Ist tatsächlich die Zeit das Problem?

Zahlen und Kinder IV

- Auf einem Bauernhof haben die Hühner gestern 12 Eier und heute 15 Eier gelegt.
  $12 + 15$ ist eine sinnvolle Aufgabe, obwohl es Kardinalzahlen zu verschiedenen Zeitpunkten sind.

$\Longrightarrow$ Entscheidend sind nicht verschiedene Zeitpunkte sondern das Kausalverhältnis.

$\Longrightarrow$ Vorsicht beim Addieren von Kardinalzahlen, die in einem Kausalverhältnis stehen.

Was sind Zahlen?

- Zahlen sind abstrakte Objekte, mit denen man rechnen kann.
  Zwei Operationen $+$ und $*$ mit Rechengesetzen.
  - Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$
  - Kommutativgesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$
  - Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Zahlenbereichserweiterung:
  gebrochene, negative, reelle, komplexen Zahlen
- Operationen müssen konsistent definiert werden.
- Bei der Definition der gebrochenen Zahlen: Paare, Addition.
- Natürliche Zahlen entstehen durch
  Identifizierung von Kardinal- und Ordinalzahlen.
- Wie funktioniert die Zahlenbereichserweiterung ohne
  Identifizierung?

Natürliche Zahlen als Kardinalzahlen

- Anzahl der Elemente einer Menge.
- Äquivalenzrelation. Faktorisierung. Vergleich.
- Ergebnis: $m_a < m_b < m_c < \ldots$
- Mengenoperationen $\Longleftrightarrow$ Operationen zwischen Zahlen:
- Im Raum zu einem Zeitpunkt.
- Haben immer eine Einheit. Z.B. "Stück"
- Kann man addieren und subtrahieren.
- Multiplikation ist Unsinn (Quadrat der Einheit).
- Lückenhaftigkeit (Kontinuumshypothese)
- Negative Kardinalzahlen sind i.O. (z.B. Schulden)

Natürliche Zahlen als Ordinalzahlen

- Peanosche Axiome: Jede Zahl hat genau einen Nachfolger.
- Lückenlosigkeit!
- Was ist Zählen?
  - Das 1. Mal ein Stein, das 2. Mal ein Stein, ...
  - Genau die Reihenfolge der Ordinalzahlen kennen!
  - Ordinalzahlen $\Longleftrightarrow$ Kardinalzahlen
  - Zeit $\Longleftrightarrow$ Raum
- Sind die Peanoschen Axiome intuitiv? Nein!
  Jede Zahl hat einen Vorgänger!
- Kausalität. Zeitprozeß.
- Kleine Kinder können zählen, aber nicht abzählen.

Operationen mit Ordinalzahlen

- Ordinalzahlen kann man nicht addieren.
- Ordinalzahlen kann man subtrahieren.
  Differenz ist eine Kardinalzahl.
- Markierung auf dem Lineal.
- Anzahl der Tage. Keinen Strich vergessen.
  Kann man nicht nachzählen!
- Große Zahlen sind schlecht zu zählen. Kompaktheit.
- Negative Ordinalzahlen? Nein! Es gibt eine kleinste.

Äquivalenz von Kardinal- und Ordinalzahlen

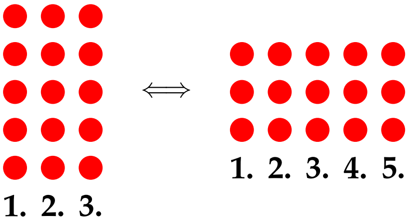
Die Äquivalenz ist nicht offensichtlich.
Sie muß axiomatisch festgelegt werden.
Dazu werden spezielle Mengen konstruiert:

$$
\begin{aligned}
0 &:= \emptyset \\
1 &:= \{\emptyset\} \\
2 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
&\vdots \\
n+1 &:= n \cup \{n\}
\end{aligned}
$$

Ist das intuitiv?
Ein Sack mit 20 Kartoffeln ist äquivalent zu
$2^{19} = 524288$ raffiniert ineinandergelegten leeren Säcken.

Die Multiplikation

- Weder Kardinal- noch Ordinalzahlen darf man multiplizieren.
  Was multipliziert man eigentlich beim Multiplizieren?
  Ordinal- mal Kardinalzahl!
- Warum ist $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$?
- Kommutativität? Räumlich oder zeitlich?
- Multiplikation negativer Zahlen.



3 Äpfel und 4 Birnen

Was sind 3 Äpfel und 4 Birnen zusammen?

$$3 \text{ Äpfel } + 4 \text{ Birnen } =?$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ Äpfel } \cdot \frac{1 \text{ Frucht}}{1 \text{ Apfel}} + 4 \text{ Birnen } \cdot \frac{1 \text{ Frucht}}{1 \text{ Birne}} &= 3 \text{ Früchte } + 4 \text{ Früchte} \\ &= 7 \text{ Früchte} \end{aligned}$$

Nicht-natürliche Zahlen als Kardinalzahlen

- Wo könnten nicht-natürliche Kardinalzahlen auftreten?
- Kardinalzahl von sehr großen Mengen.
- Beispiel: 1 Liter Ostseesand hat 23.642.383.309 Steinchen
- Dafür schreiben wir 2,3642383309 kg.
- Kardinalzahlen als Dezimalzahlen mit Einheiten.
- Messen ist das Abzählen von Einheitgrößen.
- Addition, Subtraktion? Ja! Multiplikation? Nein!
- Dia alten Griechen: Größen (Längen, Flächeninhalte)
- Mathematische Verallgemeinerung: Inhalt und Maß
- Keine Lückenlosigkeit!
- Man kann nur abzählbar viele positive Zahlen addieren.

Nicht-natürliche Zahlen als Ordinalzahlen

- Wie nummeriert man beliebig viele Objekte ohne die Nummern zu ändern?
- Beispiel: Welche Ordinalzahl liegt zwischen 5 und 6? $\frac{1}{2}(5+6)$

$$5 < \ ? \ < 6 \implies 5 < 5\,\frac{1}{2} < 6$$

- Welche Ordinalzahl liegt zwischen 5 und $5\frac{1}{2}$?

$$5 < \ ? \ < 6 \implies 5 < 5\,\frac{1}{2} < 6 \implies 5 < 5\,\frac{1}{4} < 5\,\frac{1}{2} < 6$$

- Nachteil 1: Die Nenner werden groß (Zweierpotenzen 2^k)
- Nachteil 2: Es werden nicht alle Brüche gebraucht

Mediant oder Chuquet-Mittel

- Wann bleiben die Nenner möglichst klein?
  Indem man alle rationalen Zahlen benutzt.

$\Longrightarrow$ Mediant oder Chuquet-Mittel:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

- Neue Operation: "Summe" (dazwischen liegendes Mittel)

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

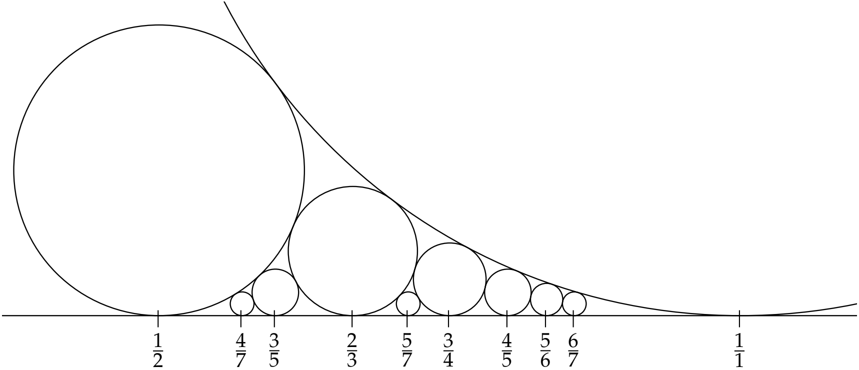
- Eigenschaften (leicht zu beweisen)
  - Mediant liegt stets dazwischen.
  - Alle Brüche kommen potentiell vor.
  - Brüche sind stets unkürzbar
    (wenn man mit ganzen Zahlen beginnt).

Fareybrüche

Beispiel: Ordinalzahlen zwischen 0 und 1
bei gegebener Nennergröße bis Nenner = 7

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) \\
F_2 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right) \\
F_3 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right) \\
F_4 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right) \\
F_5 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right) \\
F_6 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right) \\
F_7 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right)
\end{aligned}
$$

Fordkreise



Zu einer rationalen Zahl a/b sei der Fordkreis $K(a/b)$ der Kreis der Ebene mit dem Mittelpunkt $(a/b, 1/(2b^2))$ und dem Radius $1/(2b^2)$

Addition intensiver Größen

- Wir haben zwei chemische Lösungen: 66.6% und 50.0%. Wieviel prozentig ist das Gemisch?

$$66.6\% \triangleq \frac{2L_{\mathrm{C_2H_5OH}}}{3L_{\mathrm{H_2O}}}, \quad 50.0\% \triangleq \frac{1L_{\mathrm{C_2H_5OH}}}{2L_{\mathrm{H_2O}}} \Longrightarrow \quad \text{Gemisch}$$

$$\frac{2L_{\mathrm{C_2H_5OH}}}{3L_{\mathrm{H_2O}}} \oplus \frac{1L_{\mathrm{C_2H_5OH}}}{2L_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{2L_{\mathrm{C_2H_5OH}} + 1L_{\mathrm{C_2H_5OH}}}{3L_{\mathrm{H_2O}} + 2L_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{3L_{\mathrm{C_2H_5OH}}}{5L_{\mathrm{H_2O}}} \triangleq 60\%$$

- Geschwindigkeiten: 2 Stunden mit 60 km/h und 3 Stunden mit 100 km/h. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit?

$$\frac{120km}{2h} \oplus \frac{300km}{3h} = \frac{120km + 300km}{2h + 3h} = \frac{420km}{5h} = 84km/h$$

Addition gebrochener Zahlen mit Hauptnennerbildung

- Gibt es Fälle, wo die übliche Addition gebrochener Zahlen (durch Hauptnennerbildung) sinnvoll ist? Ja!
- Addition von Geschwindigkeiten:
  Zug fährt mit 60 km/h, Mensch läuft darin mit 6 km/h.
  Von außen gesehen: Mensch läuft mit 66 km/h. Warum?
- Wir beobachten beide Objekte (Zug und Mensch) dieselbe Zeitspanne (z.B. 3 sek). Das ergibt:

$$60 \text{ km/h } + 6 \text{ km/h } = \frac{50 \text{ m}}{3 \text{ sek}} + \frac{5 \text{ m}}{3 \text{ sek}} = \frac{55 \text{ m}}{3 \text{ sek}} = 66 \text{ km/h}$$

- Tatsächlich addieren wir nicht Geschwindigkeiten sondern Wege (Kardinalzahlen) weil der Nenner gleich ist.
- Das ist das "Geheimnis" der Hauptnennerbildung.

Vorschläge für den Unterricht

- Unterschiede zwischen Kardinal- und Ordinalzahlen erhalten.
- Kardinalzahlen leben im Raum.
- Ordinalzahlen leben in der Zeit.
- Natürliche Zahlen $\Longrightarrow$ Dezimalzahlen als Kardinalzahlen.
- Natürliche Zahlen $\Longrightarrow$ negative Zahlen als Kardinalzahlen.
- Natürliche Zahlen $\Longrightarrow$ gebrochene Zahlen als Ordinalzahlen.
  Adition als Mittelung intensiver Größen
- Kommutativität der Multiplikation gilt nur im “Raum”.