Geometrie und Zahlentheorie. Ganzzahlige geometrische Objekte

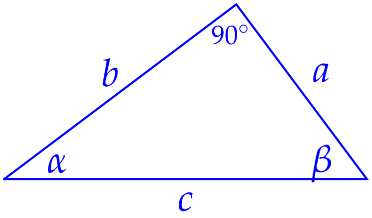
Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

19. Tag der Mathematik
17. Mai 2014, TU Berlin

Der Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Beispiele

- Ganzzahlige Lösungen von $a^2 + b^2 = c^2$.
- Pythagor"aische Tripel (a, b, c)
- Beispiel: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Weitere Beispiele durch probieren?
- Beispiel: $6^2 + 8^2 = 10^2$, $9^2 + 12^2 = 15^2$, ... (ähnliche Dreiecke)
- Teilerfremde Lösungen! $ggT(a, b, c) = 1$
- $\Longrightarrow a$ ungerade, b gerade, c ungerade

Lösung der diophantischen Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$

$$
\begin{aligned}
b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) &= (2x)(2y) \\
c + a &= 2x \implies c = x + y \\
c - a &= 2y \implies a = x - y \\
ggT(x, y) &= 1 \implies x = u^2,\ y = v^2
\end{aligned}
$$

- Lösung: $u > v$; u, v nicht beide ungerade, $ggT(u, v) = 1$

$$
\begin{aligned}
a &= u^2 - v^2 \\
b &= 2uv \\
c &= u^2 + v^2
\end{aligned}
$$

- Probe (Umkehrung) $a^2 + b^2 = c^2$?

$$
(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2
$$

Parametrische Lösung

(a, b, c) ergeben sich aus zwei Parametern u und v:

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & c^2 \\ (u^2 - v^2)^2 & + & (2uv)^2 & = & (u^2 + v^2)^2 \end{array}$$

- Für alle u und v mit
  $ggT(u, v) = 1$, $u > v$; u, v nicht beide ungerade
  erhält man alle "unähnlichen" rechtwinkligen Dreiecke.
- Was haben u und v für Einheiten? $a = u^2 - v^2$
  Wurzel aus einer Länge?

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 - v^2$	α	β
2	1	3	4	5	53.1301°	36.8699°
3	2	5	12	13	67.3801°	22.6199°
4	1	15	8	17	28.0725°	61.9275°
4	3	7	24	25	73.7398°	16.2602°
5	2	21	20	29	43.6028°	46.3972°
5	4	9	40	41	77.3196°	12.6804°
6	1	35	12	37	18.9246°	71.0754°
6	5	11	60	61	79.6111°	10.3889°
7	2	45	28	53	31.8908°	58.1092°
7	4	33	56	65	59.4898°	30.5102°
7	6	13	84	85	81.2026°	8.79741°
8	1	63	16	65	14.25°	75.75°
8	3	55	48	73	41.1121°	48.8879°
8	5	39	80	89	64.0108°	25.9892°
8	7	15	112	113	82.3719°	7.62815°

Weitere ganzzahlige Größen

1. Kathete	a	$=$	$2uv$
2. Kathete	b	$=$	$u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$
Hypothenuse	c	$=$	$u^2 + v^2$
Flächeninhalt	S	$=$	$uv(u^2 - v^2) = uv(u+v)(u-v)$
Halber Umfang	p	$=$	$u(u+v)$
Umkreisdurchmesser	$2R$	$=$	$u^2 + v^2$
Inkreisradius	r	$=$	$v(u-v)$

- Alle Längen hängen quadratisch von u und v ab.
- Zusammenhänge? $2R = c$ (Satz des Thales), $S = p \cdot r$, ...
- Winkel? Rationale sin, cos, tan?

Rationale Größen

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2$$

$$\text{Winkel:} \quad \begin{aligned} \frac{AK}{H} &= \cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \\ \frac{GK}{H} &= \sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{2uv}{u^2+v^2} \\ \frac{GK}{AK} &= \tan\alpha = \cot\beta = \frac{a}{b} = \frac{2uv}{u^2-v^2} \end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\sin\alpha = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \quad \cos\alpha = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}, \quad \tan\alpha = \frac{2uv}{u^2-v^2}$$

Additionstheoreme:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\frac{2uv}{u^2+v^2}}{1+\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}} = \frac{2uv}{2u^2} = \frac{v}{u}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \frac{\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}}{1+\frac{2uv}{u^2+v^2}} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2+2uv} = \frac{u-v}{u+v}$$

Gute Idee: Tangens des halben Winkel ist rational. Und umgekehrt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad\Longrightarrow\quad \sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

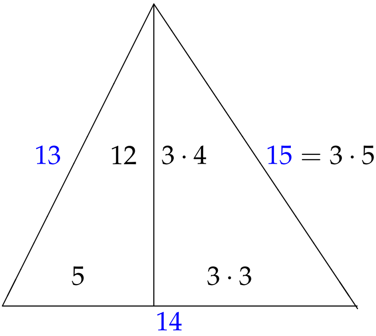
- Allgemeine Dreiecke mit ganzahligen Seitenlängen?
- Allgemeine Dreiecke mit ganzahligen Seitenlängen und ganzahligem Flächeninhalt?
- Beispiel: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ (beinahe gleichseitig!)
- Berechnung des Flächeninhaltes mit Heronscher Formel:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

  (Daher der Name: Heronische Dreiecke)
- Im Beispiel:
  $S = \frac{1}{4}\sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = \frac{1}{4}\sqrt{7^2 \cdot 6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2} = 7 \cdot 6 \cdot 2 = 84$

2 rechtwinklige Dreiecke = 1 allgemeines Dreieck

$$\begin{aligned} 5^2 + 12^2 &= 13^2 \\ 3^2 + 4^2 &= 5^2 \implies (3\cdot 3)^2 + (3\cdot 4)^2 = (3\cdot 5)^2,\ 9^2 + 12^2 = 15^2 \end{aligned}$$



Die Gaußsche Idee

$$\text{Ansatz:}\qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{v}{u},\ \ \tan\frac{\beta}{2}=\frac{s}{t},$$

Ist auch $\tan\frac{\gamma}{2}$ rational?

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\gamma}{2} &= \tan\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}=\tan\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)= \\
&= \cot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\frac{\beta}{2}}{1+\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}}= \\
&= \frac{\frac{u}{v}-\frac{t}{s}}{1+\frac{u}{v}\cdot\frac{t}{s}}=\frac{su-tv}{tu+sv}
\end{aligned}$$

Wann sind die Seiten ganzzahlig?

Wenn der Tangens von allen halben Winkeln rational ist, dann sind auch die Sinuswerte der Winkel rational.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u},\quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{s}{t},\quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{su-tv}{tu+sv}$$

$$\sin\alpha = \frac{2uv}{u^2+v^2},\quad \sin\beta = \frac{2st}{s^2+t^2},\quad \sin\gamma = \frac{2(tu+sv)(su-tv)}{(s^2+t^2)(u^2+v^2)}$$

$$\text{Sinussatz:}\qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$a = 2R\sin\alpha,\quad b = 2R\sin\beta,\quad c = 2R\sin\gamma$$

$\Longrightarrow$ Die Seiten sind ganzzahlig bei geeignetem Umkreisradius R.

Die Gaußsche parametrische Lösung

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma$$

$$\sin\alpha = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \quad \sin\beta = \frac{2st}{s^2+t^2}, \quad \sin\gamma = \frac{2(tu+sv)(su-tv)}{(s^2+t^2)(u^2+v^2)}$$

Wenn: $4R = (s^2+t^2)(u^2+v^2)$ dann

$$\begin{aligned} a &= uv(s^2+t^2) \\ b &= st(u^2+v^2) \\ c &= (tu+sv)(su-tv) \end{aligned}$$

Ist auch der Flächeninhalt ganzzahlig?

Der Flächeninhalt ist ganzzahlig

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

$$a = uv(s^2+t^2),\ b = st(u^2+v^2),\ c = (tu+sv)(su-tv)$$

$$\begin{aligned}
p &= \tfrac{a+b+c}{2} &= su(tu+sv) &= stu^2 + s^2uv \\
p_A &= \tfrac{-a+b+c}{2} &= tu(su-tv) &= stu^2 - t^2uv \\
p_B &= \tfrac{a-b+c}{2} &= sv(su-tv) &= s^2uv - stv^2 \\
p_C &= \tfrac{a+b-c}{2} &= tv(tu+sv) &= t^2uv + stv^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C} = \\
&= \sqrt{\big(su(tu+sv)\big)\big(tu(su-tv)\big)\big(sv(su-tv)\big)\big(tv(tu+sv)\big)} = \\
&= \sqrt{(stuv)^2(tu+sv)^2(su-tv)^2} = stuv(tu+sv)(su-tv)
\end{aligned}$$

Die Gaußsche parametrische Lösung. Zusammenfassung

$$
\begin{aligned}
a &= uv(s^2+t^2)\\
b &= st(u^2+v^2)\\
c &= (tu+sv)(su-tv)\\
4R &= (s^2+t^2)(u^2+v^2)\\
S &= stuv(tu+sv)(su-tv)\\
p &= su(tu+sv)\\
p_A &= tu(su-tv)\\
p_B &= sv(su-tv)\\
p_C &= tv(tu+sv)
\end{aligned}
$$

- Parametrisierung mit vier Parametern u, v, s, t.
- Was ist der Unterschied zwischen drei Strecken und einem Dreieck?
- Einheiten: $s, t = [A]$, $u, v = [B]$, Länge $= [A^2B^2]$
  Jede neu gefundene Länge muß die Einheit $[A^2B^2]$ haben.
- Einfache Methode zum Beweis von Formeln im Dreieck.

S setzt sich aus Produkten zusammen, z.B.

$$S = stuv(tu+sv)(su-tv) = \Big(su(tu+sv)\Big)\Big(tv(su-tv)\Big) = p \cdot r$$

Formeln für den Flächeninhalt

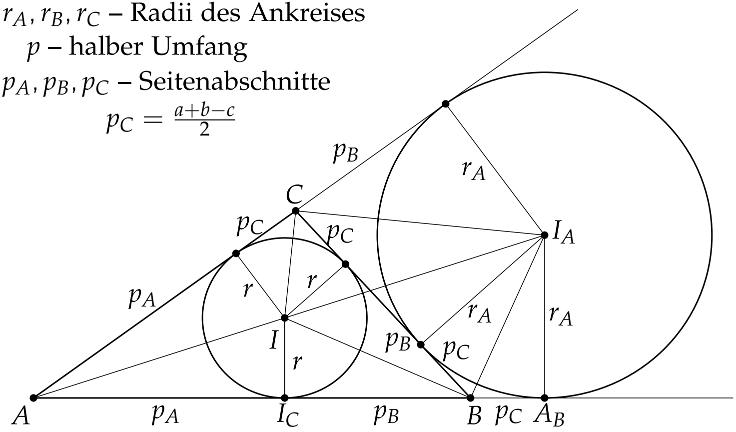
r – Radius des Inkreises

r_A, r_B, r_C – Radii des Ankreises

p – halber Umfang

p_A, p_B, p_C – Seitenabschnitte

$$p_C = \frac{a+b-c}{2}$$



$$S = pr = p_A r_A = p_B r_B = p_C r_C$$

Herleitung von Formeln

$$
\begin{aligned}
a &= uv(s^2+t^2)\\
b &= st(u^2+v^2)\\
c &= (tu+sv)(su-tv)\\
4R &= (s^2+t^2)(u^2+v^2)\\
S &= stuv(tu+sv)(su-tv)
\end{aligned}
$$

- $4RS = abc$
- $\frac{1}{2}h_C = S/c = stuv$

Weitere Formeln

$$S = pr = p_A r_A = p_B r_B = p_C r_C$$

$$\begin{array}{rcccrcl}
S & = & stuv(tu+sv)(su-tv) & & & & \\
p & = & su(tu+sv) & \Longrightarrow & r & = & tv(su-tv) \\
p_A & = & tu(su-tv) & \Longrightarrow & r_A & = & sv(tu+sv) \\
p_B & = & sv(su-tv) & \Longrightarrow & r_B & = & tu(tu+sv) \\
p_C & = & tv(tu+sv) & \Longrightarrow & r_C & = & su(su-tv)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcccl}
[A^2B^2]: & s^2u^2 & = & stuv + (s^2u^2 - stuv) & = & \frac{1}{2}h_C + r_C \\
 & t^2v^2 & = & stuv - (t^2v^2 - stuv) & = & \frac{1}{2}h_C - r \\
 & s^2v^2 & = & (s^2v^2 + stuv) - stuv & = & r_A - \frac{1}{2}h_C \\
 & t^2u^2 & = & (t^2u^2 + stuv) - stuv & = & r_B - \frac{1}{2}h_C
\end{array}$$

$$r_A + r_B + r_C - r = s^2u^2 + t^2v^2 + s^2v^2 + t^2u^2 = (s^2+t^2)(u^2+v^2) = 4R$$

Drei frei gewähle Winkel?

- 1 Winkel + Umkreisradius $\Longrightarrow$ rechwinkliges Dreieck

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{2uv}{u^2+v^2},\ 2R = u^2+v^2$$

- 2 Winkel + Umkreisradius $\Longrightarrow$ allgemeines Dreieck

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u},\ \tan\frac{\beta}{2} = \frac{s}{t},\ 4R = (s^2+t^2)(u^2+v^2) \quad \Longrightarrow \quad \ldots$$

- 3 Winkel + Umkreisradius $\Longrightarrow$???

$$\begin{aligned} \tan\frac{\psi}{2} &= \frac{v}{u},\ \tan\frac{\theta}{2} = \frac{t}{s},\ \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{x} \\ 4R &= (s^2+t^2)(u^2+v^2)(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Welches Objekt hat drei frei wählbare Winkel und einen Umkreis? Das Sehnenviereck. Aber was sind die drei Winkel?

$$\begin{aligned} \tan\frac{\psi}{2} &= \frac{v}{u},\ \tan\frac{\theta}{2} = \frac{t}{s},\ \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{x} \\ 4R &= (s^2+t^2)(u^2+v^2)(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Sinussatz im Sehnenviereck mit drei (???) Diagonalen e, f, g

$$2R = \frac{e}{\sin\psi} = \frac{f}{\sin\varphi} = \frac{g}{\sin\theta}$$

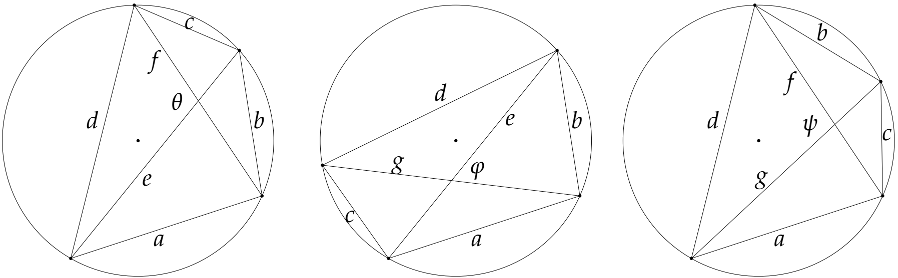
$$\begin{aligned} e &= (s^2+t^2)uv(x^2+y^2) \\ f &= (s^2+t^2)(u^2+v^2)xy \\ g &= st(u^2+v^2)(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Flächeninhalt ist ganzzahlig? Ja! $S = efg/(4R)$

$$S = st(s^2+t^2)uv(u^2+v^2)xy(x^2+y^2)$$

Verschiedene Sehnenvierecke

Aus vier Strecken a, b, c, d kann man drei nichtkongruente Sehnenvierecke mit gleichem Flächeninhalt bilden. Jedes dieser drei Sehnenvierecke besitzt zwei von drei Diagonalen e, f, g, die sich unter einem der Winkel φ, θ, ψ schneiden.



Ganzahlige Quader?

- Gibt es Quader mit ganzahligen Seitenlängen a, b, c, ganzahligen Flächendiagonalen d_a, d_b, d_c und ganzahliger Raumdiagonalen D?
  Oder: Gibt es ganzahlige Lösungen $(a, b, c, d_a, d_b, d_c, D)$ des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} d_a^2 &= b^2 + c^2 \\ d_b^2 &= c^2 + a^2 \\ d_c^2 &= a^2 + b^2 \\ D^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

- Nein! Bis jetzt noch nicht. Auch kein Gegenbeweis!
- Quader mit ganzahliger Raumdiagonalen D gibt es nat"urlich:

$$3^3 + 4^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$$

Aber $\sqrt{4^2 + 12^2}$ und $\sqrt{3^2 + 12^2}$ sind nicht ganz.

Ganzahlige Parallelepipede?