Zahlentheorie und Geometrie

HOLGER STEPHAN

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

Herbsttagung der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg
15. November 2014

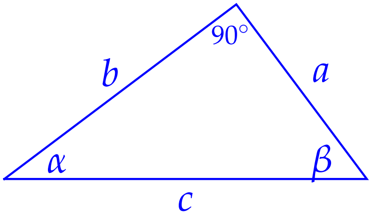
Diophantische Gleichungen

- Fermatsche Gleichung: $a^n + b^n = c^n$, $n \geq 2$
- Gesucht sind ganzzahlige oder rationale Lösungen
- Zwei Fälle: $n \geq 3$ und $n = 2$
- Der Fall $n \geq 3$
  - Sehr schweres Problem, 1994 von Taylor und Wiles beweisen, daß es keine Lösungen gibt.
    Eine leere Lösungsmenge ist nicht besonders interessant.
- Der Fall $n = 2$
  - Einfach, Lösungen seit dem Altertum bekannt
  - Unendlich viele Lösungen. Anwendbar!

Der Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Die griechische "Grundlagenkrise"

- Besonders einfach: Konstruktion eines Dreiecks aus drei Seiten
- Aufgabe: Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus zwei gegebenen Seiten $a = 10\text{cm}$, $b = 20\text{cm}$
- Bestimmung von c mit Satz des Pythagoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{50} \approx 22.4$
- Konstruktion z.B. aus 10cm, 20cm, 22.4cm
- $c^2 - a^2 - b^2 = 22.4^2 - 10^2 - 20^2 = 1.76 \neq 0$
- Dreieck ist nicht rechtwinklig! Nur annähernd.
- Ganzzahlige Lösungen von $a^2 + b^2 = c^2$ sind gefragt. (Es gibt irrationale Zahlen, aber man kann sie ignorieren.)

Beispiele

- Ganzzahlige Lösungen von $a^2 + b^2 = c^2$.
- Genannt: pythagoräische Tripel (a, b, c)
- Beispiel: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Weitere Beispiele durch Probieren?
- Beispiele: $6^2 + 8^2 = 10^2$, $9^2 + 12^2 = 15^2$, ...
  (ähnliche Dreiecke = gleiche Seitenverhältnisse)
- Weiteres Beispiel: $5^2 + 12^2 = 13^2 \qquad (\text{weil } 25 + 144 = 169)$
- Interessant sind teilerfremde ganzzahlige Lösungen!

Lösung der diophantischen Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$

Alle Lösungen (a, b, c) ergeben sich aus zwei Parametern u und v als

$$\begin{aligned} a &= u^2 - v^2 \\ b &= 2uv \\ c &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

Heißt: "parametrische Lösung"

Probe: $a^2 + b^2 \stackrel{?}{=} c^2$

$$\begin{array}{cccc} a^2 & + \quad b^2 & = & c^2 \\ (u^2 - v^2)^2 & + \quad (2uv)^2 & = & (u^2 + v^2)^2 \\ (u^4 - 2u^2v^2 + v^4) & + \quad (4u^2v^2) & = & (u^4 + 2u^2v^2 + v^4) \end{array}$$

- Für alle u und v mit
  $ggT(u, v) = 1$, $u > v$; u, v nicht beide ungerade
  erhält man alle "unähnlichen" rechtwinkligen Dreiecke.

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 - v^2$	α	β
2	1	3	4	5	53.1301°	36.8699°
3	2	5	12	13	67.3801°	22.6199°
4	1	15	8	17	28.0725°	61.9275°
4	3	7	24	25	73.7398°	16.2602°
5	2	21	20	29	43.6028°	46.3972°
5	4	9	40	41	77.3196°	12.6804°
6	1	35	12	37	18.9246°	71.0754°
6	5	11	60	61	79.6111°	10.3889°
7	2	45	28	53	31.8908°	58.1092°
7	4	33	56	65	59.4898°	30.5102°
7	6	13	84	85	81.2026°	8.79741°
8	1	63	16	65	14.25°	75.75°
8	3	55	48	73	41.1121°	48.8879°
8	5	39	80	89	64.0108°	25.9892°
8	7	15	112	113	82.3719°	7.62815°

Bedeutung einer parametrischen Lösung

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & c^2 \\ \left(u^2 - v^2\right)^2 & + & (2uv)^2 & = & \left(u^2 + v^2\right)^2 \end{array}$$

- Ein quadratischer Ausdruck zweier Parameter u und v ergibt eine Länge $\Longrightarrow$ u und v haben eine physikalische Einheit: Wurzel aus einer Länge: $[\sqrt{cm}]$
- Eine verborgene Struktur:
  Wenn man aus zwei Größen u und v mit der Einheit $[\sqrt{cm}]$ mit Hilfe quadratischer Ausdrücke drei Längen bildet,
  $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ und $c = u^2 + v^2$,
  dann kann nab daraus ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren.
- Jeder quadratische Ausdruck aus u und v ist eine Länge!!!

Winkelfunktionen ...

... sind Streckenverhältnisse und sind rational, wenn die Seitenlängen natürliche Zahlen sind.

- Definition von Sinus und Cosinus

$$\text{Winkel:}\quad \begin{aligned} \frac{AK}{H} &= \cos\alpha = \frac{b}{c} \\ \frac{GK}{H} &= \sin\alpha = \frac{a}{c} \end{aligned}$$

- Trigonometrischer Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

- Mathematisch äquivalente Aufgabe:
  Finde Winkel α derart, daß $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ rational sind.

Rational oder ganzzahlig?

- Streckenverhältnisse (rationale Zahlen) haben keine Einheit.
  Man kann sie addieren und multiplizieren,
  aber was für physikalische Größen ergibt das Ergebnis?
  Physikalisch: Intensive Größen
- Streckenlängen (natürliche Zahlen mit Einheit) kann man nur addieren. Multiplikation von Längen ergibt eine neue Einheit, den Flächeninhalt.
  Physikalisch: Extensive Größen

Ganze Winkel $\iff$ *Halbe Winkel*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \iff \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = (1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$$

$$\iff \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

In unserem Fall:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \implies \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u}$$

Umkehrung gilt auch:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \implies \sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Erkenntnis: Dreieck ist pythagoräisch $\iff$ $\tan\frac{\alpha}{2}$ ist rational.

Gute Idee (merken!): Tangens des halben Winkel ist rational.

Weitere ganzzahlige Größen

Jeder quadratische Ausdruck von u und v ist eine Länge.

“Einfache quadratische Ausdrücke sind leicht zu findende Längen.”

a	$= 2uv$	1. Kathete
b	$= u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$	2. Kathete
c	$= u^2 + v^2$	Hypotenuse
R	$= \frac{1}{2}(u^2+v^2)$	Umkreisradius (Satz d. Thales)
p	$= \frac{1}{2}(a+b+c) = u(u+v)$	Halber Umfang
r	$= \frac{1}{2}(b+c-a)\tan\frac{\alpha}{2} = v(u-v)$	Inkreisradius

Erkenntnis: $\frac{1}{2}a \cdot b = p \cdot r = S$ (Flächeninhalt)

Zwischenerkenntnisse

Parametrische Lösung einer diophantischen Gleichung hilft:

- eine innere Struktur zu entdecken,
- bei der Konstruktion von geometrischen Objekten,
- geometrische Zusammenhänge zu finden.

Verallgemeinerungen

- Allgemeine Dreiecke mit ganzahligen Seitenlängen?
- Allgemeine Dreiecke mit ganzahligen Seitenlängen und ganzahligem Flächeninhalt!
  Dann sind auch viele andere Strecken ganzzahlig oder rational.

- Berechnung des Flächeninhaltes mit Heronischer Formel:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

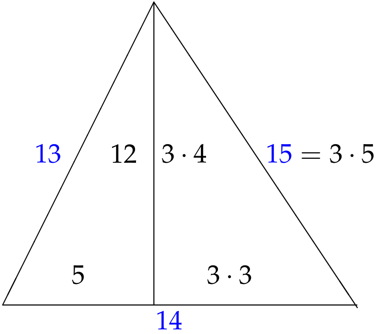
(Heron von Alexandria, vermutlich 1.Jh.n.Chr.)

- Ergibt diophantische Gleichung

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned}$$

2 rechtwinklige Dreiecke = 1 allgemeines Dreieck

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$3^2 + 4^2 = 5^2 \implies (3\cdot 3)^2 + (3\cdot 4)^2 = (3\cdot 5)^2,\ 9^2 + 12^2 = 15^2$$



Flächeninhalt (Herons Formel):
$a = 13$, $b = 14$, $c = 15$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}\sqrt{42\cdot 16\cdot 14\cdot 12} = \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{7^2\cdot 6^2\cdot 4^2\cdot 2^2} = \\ &= 7\cdot 6\cdot 2 = 84 \end{aligned}$$

Stellt sich heraus: $\triangle$ ist Heronisch $\iff$ 2 mal pythagoräisches $\triangle$

Brahmaguptas (598 – 668 n.Chr.) Idee

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

Parametrische Lösung:

$$\begin{aligned} a &= n(m^2+k^2) \\ b &= m(n^2+k^2) \\ c &= (m+n)(mn-k^2) \\ \Longrightarrow \quad S &= mnk(m+n)(mn-k^2) \end{aligned}$$

- Bedingungen für Eindeutigkeit:
  $\mathrm{ggT}(m,n,k) = 1$, $m \geq n \geq 1$, $mn > k^2 \geq \frac{m^2 n}{2m+n}$
- Einheiten von m, n, k: $[\sqrt[3]{cm}]$
- Nachteil: Nicht besonders schön weil asymmetrisch!

Die Gaußsche Idee

Carl Friedrich Gauß (1777–1855):
Winkelfunktionen rational $\Longrightarrow$ Strecken ganzzahlig
Tangens vom halben Winkel rational $\Longrightarrow$ Winkelfunktionen rational

Sinussatz: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \qquad (2\times\text{Umkreisradius})$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}\,, \quad \sin\beta = \frac{b}{2R}\,, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

Ansatz: $$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{s}{t},$$

Ist auch $\tan\frac{\gamma}{2}$ rational? (Es gilt stets: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$)

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \tan\frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \ldots = \frac{su - tv}{tu + sv}$$

Wann sind die Seiten ganzzahlig?

Wenn der Tangens von allen halben Winkeln rational ist, dann sind auch die Sinuswerte der Winkel rational.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{s}{t}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{su - tv}{tu + sv}$$

$$\sin\alpha = \frac{2uv}{u^2 + v^2}, \quad \sin\beta = \frac{2st}{s^2 + t^2}, \quad \sin\gamma = \frac{2(tu + sv)(su - tv)}{(s^2 + t^2)(u^2 + v^2)}$$

$$\text{Sinussatz:} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{2R}\ , \quad \sin\beta = \frac{b}{2R}\ , \quad \sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

$\Longrightarrow$ Die Seiten sind ganzzahlig wenn Umkreisradius = Hauptnenner

$$4R = (s^2 + t^2)(u^2 + v^2)$$

Die Gaußsche parametrische Lösung

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma, \quad 4R = (s^2+t^2)(u^2+v^2)$$

$$\sin\alpha = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \quad \sin\beta = \frac{2st}{s^2+t^2}, \quad \sin\gamma = \frac{2(tu+sv)(su-tv)}{(s^2+t^2)(u^2+v^2)}$$

$$\begin{aligned} a &= uv(s^2+t^2) \\ b &= st(u^2+v^2) \\ c &= (tu+sv)(su-tv) \end{aligned}$$

Ist auch der Flächeninhalt ganzzahlig?

Heronische Formel

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \\ &= p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C \end{aligned}$$

$$a = uv(s^2+t^2),\ b = st(u^2+v^2),\ c = (tu+sv)(su-tv)$$

$$\begin{aligned} p &= su(tu+sv) \\ p_A &= tu(su-tv) \\ p_B &= sv(su-tv) \\ p_C &= tv(tu+sv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C} = \\ &= \sqrt{(stuv)^2(tu+sv)^2(su-tv)^2} = stuv(tu+sv)(su-tv) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Der Flächeninhalt ist ganzzahlig.

Die Gaußsche parametrische Lösung. Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
a &= uv(s^2+t^2) \\
b &= st(u^2+v^2) \\
c &= (tu+sv)(su-tv) \\
4R &= (s^2+t^2)(u^2+v^2) \\
S &= stuv(tu+sv)(su-tv) \\
p &= su(tu+sv) \\
p_A &= tu(su-tv) \\
p_B &= sv(su-tv) \\
p_C &= tv(tu+sv)
\end{aligned}$$

- Parametrisierung mit vier Parametern u, v, s, t.
- Einheiten: $s, t = [A]$, $u, v = [B]$, Länge $= [A^2B^2]$
  Jede neu gefundene Länge muß die Einheit $[A^2B^2]$ haben.

Flächeninhalt S setzt sich aus Produkten zusammen, z.B.

$$S = stuv(tu+sv)(su-tv) = \Big(su(tu+sv)\Big)\Big(tv(su-tv)\Big) = p \cdot r$$

Weitere Produkte für den Flächeninhalt

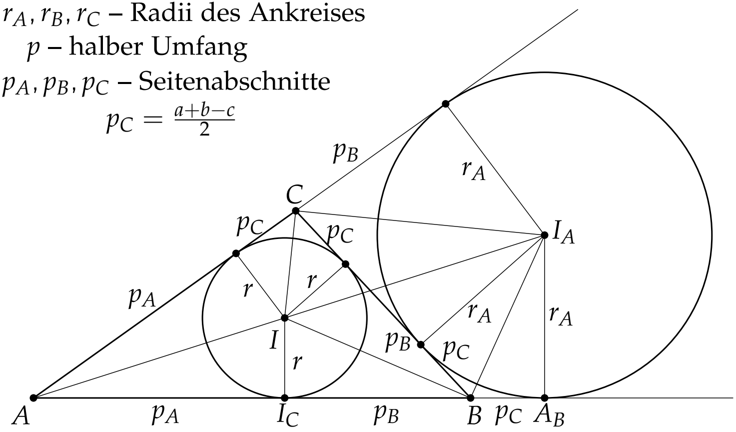
r – Radius des Inkreises

r_A, r_B, r_C – Radii des Ankreises

p – halber Umfang

p_A, p_B, p_C – Seitenabschnitte

$$p_C = \frac{a+b-c}{2}$$



$$\boxed{S = pr = p_A r_A = p_B r_B = p_C r_C}$$

Herleitung von Formeln

$$S = pr = p_A r_A = p_B r_B = p_C r_C$$

$$\begin{array}{rcccccc}
S & = & stuv(tu+sv)(su-tv) & & & & \\
p & = & su(tu+sv) & \Longrightarrow & r & = & tv(su-tv) \\
p_A & = & tu(su-tv) & \Longrightarrow & r_A & = & sv(tu+sv) \\
p_B & = & sv(su-tv) & \Longrightarrow & r_B & = & tu(tu+sv) \\
p_C & = & tv(tu+sv) & \Longrightarrow & r_C & = & su(su-tv)
\end{array}$$

$$r_A + r_B + r_C - r = s^2u^2 + t^2v^2 + s^2v^2 + t^2u^2 = (s^2+t^2)(u^2+v^2) = 4R$$

Geometrisch schwer zu beweisen, aber jetzt sehr einfach:

$$\boxed{r_A + r_B + r_C = 4R + r}$$

Was stört die Ästhetik?

- Asymmetrie in den Winkeln:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{s}{t}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{su - tv}{tu + sv}$$

- Asymmetrie in den Seiten:

$$a = uv(s^2 + t^2), \; b = st(u^2 + v^2), \; c = (tu + sv)(su - tv)$$

- Man kann im Dreieck nur eine oder drei Größen hervorheben!
- Besser sieht folgende Parametrisierung von Winkel aus:

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{v}{u}, \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{t}{s}, \quad \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{x}$$

... und der Flächeninhalt sei $S = stuvxy$

Eine symmetrische Parametrisierung

- Parametrisierung der Winkel:

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{v}{u}\,, \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{t}{s}\,, \quad \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{x}$$

  Flächeninhalt: $S = stuvxy$
- Einheit von u, v sei $[A]$, von t, s sei $[B]$ von y, x sei $[C]$.
- Einheit des Flächeninhaltes: $[A^2B^2C^2]$
- Einheit einer Länge: $[ABC]$
- Es gibt 8 Möglichkeiten, aus u, v, t, s, y, x Längen zu bilden:

$$\begin{aligned} p_a &= tvy & \qquad r_a &= sux \\ p_b &= svx & r_b &= tuy \\ p_c &= tux & r_c &= svy \\ p_d &= suy & r_d &= tvx \end{aligned}$$

$$\boxed{S = p_a \cdot r_a = p_b \cdot r_b = p_c \cdot r_c = p_d \cdot r_d = \sqrt{p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot p_d}}$$

Heronische Formel im Sehnenviereck

Im Dreieck:

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c) = \\ &= 2p_A \cdot 2p_B \cdot 2p_C \cdot 2p \end{aligned}$$

Im Sehnenviereck:

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) = \\ &= 2p_a \cdot 2p_b \cdot 2p_c \cdot 2p_d \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + \\ &+ 8abcd - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 \end{aligned}$$

Parametrische Lösung einer diophantischen Gleichung

$$p_a = tvy, \quad p_b = svx, \quad p_c = tux, \quad p_d = suy$$

$$\begin{aligned}
p_a &= \tfrac{1}{2}(-a+b+c+d) \\
p_b &= \tfrac{1}{2}(+a-b+c+d) \\
p_c &= \tfrac{1}{2}(+a+b-c+d) \\
p_d &= \tfrac{1}{2}(+a+b+c-d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \tfrac{1}{2}(-p_a+p_b+p_c+p_d) = \tfrac{1}{2}(-tvy+svx+tux+suy) \\
b &= \tfrac{1}{2}(+p_a-p_b+p_c+p_d) = \tfrac{1}{2}(+tvy-svx+tux+suy) \\
c &= \tfrac{1}{2}(+p_a+p_b-p_c+p_d) = \tfrac{1}{2}(+tvy+svx-tux+suy) \\
d &= \tfrac{1}{2}(+p_a+p_b+p_c-p_d) = \tfrac{1}{2}(+tvy+svx+tux-suy)
\end{aligned}$$

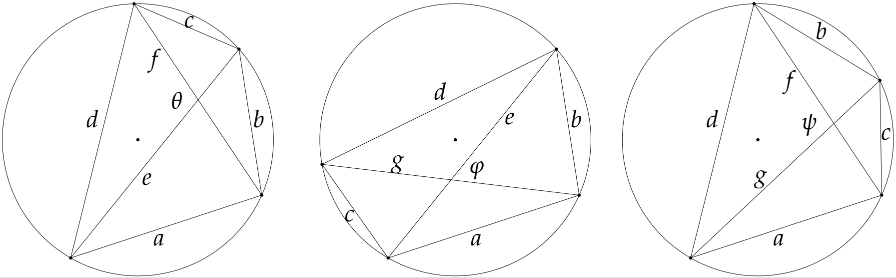
$$16S^2 = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

Probe klappt!

Was sind ψ, θ, φ für Winkel im Sehnenviereck?

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{v}{u}\,, \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{t}{s}\,, \quad \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{x}$$

Aus vier Strecken a, b, c, d kann man drei nichtkongruente Sehnenvierecke mit gleichem Flächeninhalt bilden. Jedes dieser drei Sehnenvierecke besitzt zwei von drei Diagonalen e, f, g, die sich unter einem der Winkel φ, θ, ψ schneiden.



Weitere ganzzahlige Längen?

- Sind auch die Diagonalen ganzzahlig?
  ... und der Umkreisradius?
- Satz des Ptolemäus in drei Sehnenvierecken:
  (Claudius Ptolemäus, der Astronom, etwa 100 – 160 n.Chr.)

$$\begin{aligned} ef &= ac + bd = uvxy(s^2 + t^2) \\ eg &= ad + bc = stuv(x^2 + y^2) \\ fg &= ab + cd = stxy(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

$$e^2 = \frac{ef \cdot eg}{fg} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} = u^2 v^2 \frac{(s^2 + t^2)(x^2 + y^2)}{(u^2 + v^2)}$$

$$4R = \frac{S}{efg} = \sqrt{(s^2 + t^2)(u^2 + v^2)(x^2 + y^2)}$$

- Satz: Diagonalen sind ganzzahlig genau dann,
  wenn es auch der Umkreisradius ist!

Drei interessante Aufgaben

Sehnenviereck mit ganzzahligem Flächeninhalt und ...

- 4 ganzzahlige Seiten
- 3 ganzzahlige Diagonalen und ganzzahliger Umkreisradius
- alle Seiten, Diagonalen und Umkreisradius ganzzahlig (dann ist auch alles andere ganzzahlig oder rational)

$$4R = \frac{S}{efg} = \sqrt{s^2+t^2} \cdot \sqrt{u^2+v^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

- Umkreisradius ist ganz, wenn z.B. $(s, t, \sqrt{s^2+t^2})$, $(u, v, \sqrt{u^2+v^2})$, $(x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ pythagoräische Tripel sind, aber nicht nur.
- Lösung mit
  - Gaußschen ganze (komplexe) Zahlen: $x+iy$, $|x| = \sqrt{x^2+y^2}$
  - Gaußschen Primzahlen: z.B. $5 = (2+i)(2-i)$

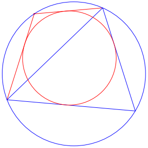
Wieder Brahmagupta

$$
\begin{aligned}
a &= [t(u+v)+(1-uv)][u+v-t(1-uv)] \\
b &= (1+u^2)(v-t)(1+tv) \\
c &= t(1+u^2)(1+v^2) \\
d &= (1+v^2)(u-t)(1+tu) \\
e &= u(1+t^2)(1+v^2) \\
f &= v(1+t^2)(1+u^2) \\
S &= uv[2t(1-uv)-(u+v)(1-t^2)][2(u+v)t+(1-uv)(1-t^2)] \\
4R &= (1+u^2)(1+v^2)(1+t^2)
\end{aligned}
$$

- u, v, t sind rationale Zahlen
- 1. Nachteil: Asymmetrie
- 2. Nachteil: rationale Zahlen haben keine Einheit
  Was ist eine Länge?
  Welche geometrische Bedeutung haben die Parameter?

Aus einem Sehnenviereck wird ...

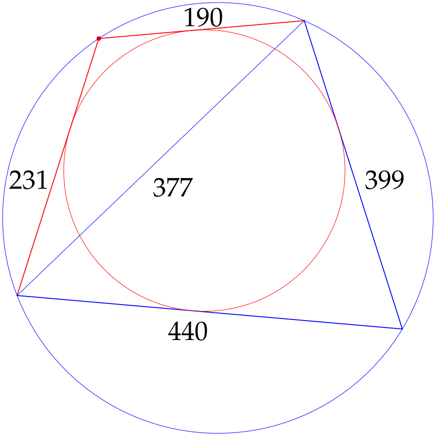
- ... ein Dreieck (eine Seitenlänge geht gegen 0)
- ... ein Orthoviereck (Diagonalen stehen senkrecht aufeinander)
- ... zwei rechtwinklige Dreiecke
- ... ein Sehnentangentenviereck
  (Das ist ein Viereck mit Um- und Inkreis, die Summen je zweier gegenüberliegender Seiten sind gleichgroß.)



Es ist schwer überhaupt irgendein Sehnentangentenviereck zu konstruieren.
$\Longrightarrow$ Es ist sinnvoll, ein ganzzahliges zu finden.

Konstruktion aus 5 Strecken: 1. blaues Dreieck; 2. rotes Dreieck

Gibt es welche?



Es gibt zwei häßliche und eine brauchbare Lösung (bis jetzt):

Umkreisradius: $\frac{1885}{8}$

Inkreisradius: $\frac{418}{3}$

2. Diagonale: $\frac{6061}{13}$

3. Diagonale: $\frac{13650}{29}$

Wünschenswert:
Parametrische Lösung (falls es unendliche viele Lösungen gibt).