Mathematik, Physik und Erkenntnistheorie

Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

Lange Nacht der Wissenschaften
11. Juni 2016

Naturgesetze. Philosophische Grundfragen

- Das Ergebnis der Forschung sind Naturgesetze
  z.B. Fallgesetz, Erhaltungssätze:
  (Impuls-, Drehimpuls-, Energie-)
- Was bedeuten die Naturgesetze?
  Haben wir der Natur damit ein Geheimnis abgerungen?
- Haben wir ein Zwangsverhalten der Natur entdeckt?
  Muß sich die Natur an die von uns entdeckten Gesetze halten?

- Wir sind es, die die Fragen an die Natur stellen!
  Wir fragen nur nach Dingen, die uns interessieren!
  Aber was interessiert uns?

Wie entstehen Naturgesetze?

1) Wir untersuchen ein (physikalisches) Objekt.
2) Das Objekt hat gewisse Eigenschaften – genannt Größen (z.B. Energie).
3) Den Größen werden Zahlen zugeordnet.
4) Frage: Wie verhalten sich die Zahlen?
5) Erkenntnis (Beispiel):
   Die Summe aller Zahlen, die wir der Energie zuschreiben, bleibt konstant.
6) Naturgesetz (Hypothese): Energieerhaltungssatz
7) Beweis der Hypothese (mathematisch).

Was für Größen interessieren uns eigentlich?

- Thermodynamik: Volumen, Temperatur
- Chemie/Alltag: Alkoholgehalt, Alkoholmenge, Gesamtvolumen
- Mechanik: Weg, Geschwindigkeit, Zeitintervall, Impuls, Masse, Kraft, Arbeit, Energie
- E-Technik: Spannung, Strom, Widerstand, Ladung, Kapazität, Induktivität
- Ökonomie: Umsatz, Preis, Stückzahl, Mitarbeiteranzahl, Produktivität

- Was interessiert uns nicht? Beispiele:
  - Wurzel aus der Länge eines Objektes
  - Das Produkt aus Weg und Zeit

Wodurch unterscheiden sich die Größen?

Die Größen kann man in zwei Typen unterteilen.
Die Unterschiede stellt man fest, wenn man mehrere Körper/Objekte zusammenbringt, einen Kontakt herstellt.

- Temperatur und Volumen
- Alkoholgehalt, Alkoholmenge und Gesamtmenge
- Geschwindigkeit, Masse und Impuls
- Geschwindigkeit, Weg und Zeit
- Preis, Stückzahl und Kosten

Zwei Sorten von physikalischen Größen

- Was passiert bei Kontakt?
  - Größen addieren, erhalten sich $\Longrightarrow$ extensiv
  - Größen mitteln sich, gleichen sich aus $\Longrightarrow$ intensiv
- Beispiele für intensive Größen:
  Temperatur, Alkoholgehalt, Geschwind., Kraft, Druck, Preise
  $\Longrightarrow$ Kann man direkt wahrnehmen und vergleichen!
- Alter Witz: Im Zimmer sind 16 Grad, draußen sind 4 Grad.
  "Mach mal das Fenster auf und laß die 4 Grad auch noch rein!"
- Beispiele für extensive Größen:
  Zeitintervall, Länge (Breite, Höhe), Fläche, Volumen, Masse, Ladung, Impuls, Energie, Stückzahl, Geld

Mathematisierung der Erkenntnis

- Wie wirkt sich die Unterscheidung in extensive und intensive Größen auf die entsprechenden Zahlen aus?
- Können wir mit realen Größen wie mit Zahlen rechnen?
- Zwei Kopfrechenaufgaben
  1) Aufgabe: Wieviel ist 25% von 24 ?
  2) Aufgabe: Wieviel ist 24% von 25 ?
- Die Multiplikation ist kommutativ, aber gefühlt asymmetrisch:

$$25\% \text{ von } 24 = \frac{25}{100} \cdot 24 = \frac{25 \cdot 24}{100} = \frac{24 \cdot 25}{100} = \frac{24}{100} \cdot 25 = 24\% \text{ von } 25$$

- Warum fühlen sich – zahlenmäßig – verschiedene reale Größen verschieden an?
- Wie kommt man von Größen zu Zahlen?

Messen von extensiven Größen

- Beispiele für extensive Größen:
  Zeitintervall, Länge (Breite, Höhe), Fläche, Volumen, Masse, Ladung, Impuls, Energie, Stückzahl, Geld
- Extensive Größen sind additiv.
- Man kann sie zählen (Stückzahl, Ladung, Geld).
- Man kann sie messen: Messen = Zählen eines Normmaßes
  - Längenmessung
  - Messung eines Zeitintevalls: Zählen von periodischen Ereignissen
- Voraussetzung zum Messen:
  Extensive Größen bleiben erhalten! $\Longrightarrow$ Erhaltungssätze!
- Extensive Größen kann man messen $\Longrightarrow$ beliebige Zahlen.

Berechnen von intensiven Größen

- Beispiele für intensive Größen:
  Alkoholgehalt, Geschwind., Kraft, Druck, Preise
- Wahrnehmbar, mittelnd, wollen sich ausgleichen
- Man kann sie nicht durch Zählen messen,
  weil sie nicht erhalten bleiben.
- Jeder int. Größen kann man zwei ext. Größen zuordnen:
  - Geschwindigkeit: Weg und Zeit $L = v \cdot T \Longrightarrow v = L/T$
  - Prozente: Anteil und Gesamtmenge $A = \% \cdot M \Longrightarrow \% = A/M$
  - Preis: Umsatz und Stückzahl $U = p \cdot S \Longrightarrow p = U/S$
- Intensive Größen kann man berechnen $\Longrightarrow$ Verhältnisse
  Ganze oder kleine gebrochene Zahlen haben wir gerne.

Die Grundgleichungen

extensiv = intensiv mal extensiv $\Longleftrightarrow$ intensiv = extensiv/extensiv

- Extensive Größen kann man addieren.
- Extensiv = intensiv mal extensiv + intensiv mal extensiv + ...
- Gesamtweg = Geschwindigkeit mal Zeit
  420 km = 120 km/h $*$ 2 Stunden + 60 km/h $*$ 3 Stunden
- Umsatz = Preis mal Stückzahl
  110 Eus = 10 Stück zu 5 Eus/Stück + 20 Stück zu 3 Eus/Stück

Funktionen, Maße und Lebesgueintegral

Allgemein in der Mathematik: Duales Produkt

$$Q = f_1 \cdot M_1 + \ldots + f_n \cdot M_n = \bar{f} \cdot (M_1 + \ldots + M_n)$$

Die f_i und M_i sind Zahlen, die man nicht unterscheiden kann.
Der unterschiedliche Typ der f_i und M_i
kommt erst für $n \longrightarrow \infty$ zum Vorschein:

$$Q = f_1 \cdot M_1 + \ldots + f_n \cdot M_n \quad \xrightarrow{n \to \infty} \quad Q(B) = \int_B f(x) M(dx)$$

Duales Produkt ergibt Lebesgueintegral

- $f(x)$ sind stetige Funktionen; $M(B)$ heißen (Radon)maße
- Die Umkehrung des Lebesgueintegrals ist die Radon-Nikodym Ableitung

$$f(x) = \lim_{M(B) \to 0, \{x\} \in B} \frac{Q(B)}{M(B)}$$

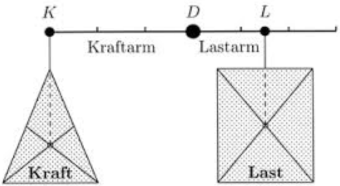
Aristoteles und Galilei

- Wikipedia:
  ... in der Antike Spekulationen angestellt
  ... Anfang des 17. Jahrhunderts stellte Galilei Messungen an
  ... unabhängig von Material, Masse und Form des Körpers.
- Aristoteles:
  Ein doppelt so schwerer Körper fällt doppelt so schnell.
- Galileo Galilei:
  Discorsi e dimostrazioni matematiche, Leiden 1638
  "Unterredung und mathematische Demonstration über zwei neue Wissenszweige die Mechanik und die Fallgesetze betreffend"

Galileis Beweis

- Es sei $v(A)$ die Geschwindigkeit (z.B. beim Auftreffen aus gegebener Höhe) eines Körpers mit der Masse A.
- Annahme: Es sei $v(A) < v(B)$, falls $A < B$.
- Wir verbinden die Körper mit einem idealen Strick.
- Die Geschwindigkeit ist intensiv, Masse ist extensiv. Also: $v(A) < v(A+B) < v(B)$ Die Geschwindigkeit der verbundenen Körper liegt dazwischen.
- Aber der verbundenen Körper $A + B$ ist schwerer als B. Es sollte $v(A+B) > v(B)$ sein.
- Widerspruch! Deshalb: Annahme $v(A) < v(B)$ ist falsch.
- Analog führt die Annahme $v(A) > v(B)$ zum Widerspruch.
- Also: $v(A) = v(B)$.

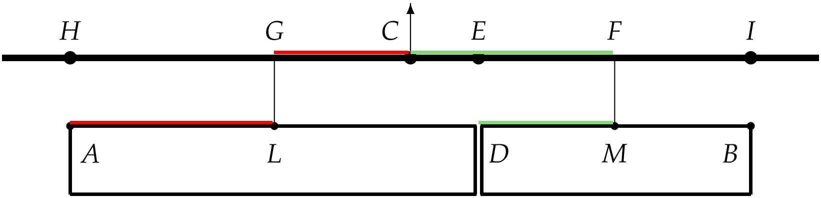
Das Hebelgesetz



Last mal Lastarm =
Kraft mal Kraftarm

- Archimedes (287 – 212 v. Chr). Mathematiker, Physiker und Ingenieur (der erste angewandter Mathematiker).
  "Gebt mir einen festen Punkt im All, und ich werde die Welt aus den Angeln heben."
- Hängt mit Drehimpulserhaltungssatz zusammen
- Hebelgesetz $\Longleftarrow$ Drehmoment = 0 $\Longleftarrow$ Drehimpulserhaltung
- Wikipedia: ... folgt aus dem Noether-Theorem
- Noether-Theorem aus der Differentialgeometrie (1918)

Galileis Beweis



$$\overline{AL} \cdot \overline{CG} = \overline{MB} \cdot \overline{CF}$$

$$\overline{HG} \cdot \overline{CG} = \overline{FI} \cdot \overline{CF}$$

Galileis Tricks:
1) Nicht zwei Massen werden zusammengefaßt
sondern eine Masse wird geteilt.
2) Keine Massepunkte sondern Balken
D.h., Masse proportional zur Länge $\Longrightarrow$ Beweis rein geometrisch

Der Dreisatz

- Aufgabe: Anderthalb Hühner legen in anderthalb Tagen anderthalb Eier. Wieviel Eier legt ein Huhn pro Tag?
- Gesucht: Naturkonstante/Materialkonstante

$$\text{Produktivität} = \frac{\text{Eier}}{\text{Hühner} * \text{Tag}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{Hühner}}{1/\text{Produktivität}} = \text{Eierstrom} = \frac{\text{Eier}}{\text{Tag}}$$

- 2 Quotienten extensiver Größen ergeben eine intensive Größe
  Linke Seite: aktiv, Handlung; Rechte Seite: passiv, Ergebnis

Weitere Beispiele

- Ökonomie: $\dfrac{\text{Hühner}}{1/\text{Produktivität}} = \text{Eierstrom} = \dfrac{\text{Eier}}{\text{Zeit}}$
- Mechanik: $\dfrac{\text{Impuls}}{\text{Masse}} = \text{Geschwindigkeit} = \dfrac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$
- Allgemein: aktiver Quotient = intensiv = passiver Quotient

- Wir interessieren uns nicht für alles, sondern nur für extensive (additive, meßbare) und intensive (mittelnde, beobachtbare) Größen.
- Erhaltungssätze für extensive Größen sind Tautologien: Wir zerlegen eine Zahl in die Summe von Summanden, addieren die Summanden und wundern uns, daß wir die ursprüngliche Summe erhalten.
- Warum interessieren uns Naturgesetze? Ziel ist es, die Situation (Experiment) so zu gestalten, daß sich eine physikalische Größe so verhält, wie wir es wollen. Friedrich Nietzsche: “Der Wille zur Macht.” (in Werk “Jenseits von Gut und Böse”, 1886)