Gleichungen dritten und vierten Grades und Konstruktionen mit mehr als Zirkel und Lineal

Holger Stephan

Weierstraß–Institut für Angewandte
Analysis und Stochastic (WIAS)

e-mail: stephan@wias-berlin.de

url: www.wias-berlin.de/people/stephan

HU Berlin, 27. April 2013; Tag der Mathematik

Geometrie $\Longleftrightarrow$ *Algebra*

- "Entgegengesetzte" Methoden
- Lösung von Gleichungen $\Longleftrightarrow$ Konstruierbarkeit
- Algebraisches $\Longleftrightarrow$ geometrisches "Lösen" von Gleichungen
- Erweiterung der Zahlenbereiche

Eine lineare Gleichung

- Gleichung $ax = b$.
  Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse. Rationale Zahlen.
- Geht's allgemeiner? Geometrisch oder algebraisch
- Geometrische Verallgemeinerung: Systeme linearer Gleichungen

$$\begin{aligned} ax + by &= A \\ cx + dy &= B \end{aligned}$$

Schnittpunkt von zwei Geraden

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Schnittpunkt von drei Ebenen

- Weiter: ... Schnittpunkt von vier Räumen
- Rationale Zahlen reichen aus.
- Algebraische Verallgemeinerung: Gleichungen höheren Grades

Algebraische Lösung einer quadratischen Gleichung

- Wir lösen die Gleichung $x^2 + px + q = 0$
- Lösung nach p, q-Formel $x_{1,2} = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$
- Rationale Zahlen $\Longrightarrow$ Reelle Zahlen
- gebrochen lineare Funktionen $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
- Rekursive Folgen 2. Ordnung: z.B. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- periodische Kettenbrüche: Lösung von $3x^2 = 6x + 2$ ist

$$1 + \sqrt{\frac{5}{3}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

- Nicht alle reellen Zahlen: z.B. nicht π, e, $\sqrt[3]{2}$

Geometrische Lösung einer quadratischen Gleichung

- Geometrisches Wurzelziehen:
  - $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ oder $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ mit Satz des Pythagoras.
  - $h = \sqrt{p \cdot q}$ Höhensatz
- Mit Zirkel und Lineal konstruierbar z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$
- Konstruktion der Lösungen der Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b^2 &= 0 \\ x^2 + ax - b^2 &= 0 \end{aligned}$$

- Es sind die Längen $\sqrt{a^2 + 4b^2}$ bzw. $\sqrt{a^2 - 4b^2}$ zu konstruieren.

Nicht konstruierbar mit Zirkel und Lineal

Zwei berühmte nicht lösbare Probleme aus der Antike

- Würfelverdopplung $\Longrightarrow x^3 = 2$, Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$.
- Winkeldreiteilung: Gegeben φ, gesucht $\alpha = \varphi/3$

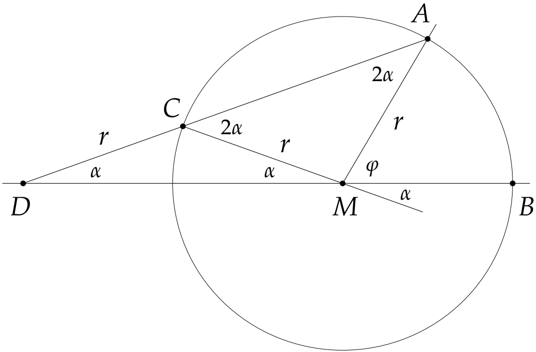
$$\sin\varphi = \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sin\varphi = 0$$

- Nicht konstruierbar weil Gleichung dritten Grades!

Winkeldreiteilung nach Archimedes

- Konstruktionsmethode: $\alpha = \varphi/3$



- Warum ist das keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal?
- Konstruktion mit Zirkel, Lineal und Stift!

Lösung einer Gleichung dritten Grades

- Lösung der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ bedeutet
  Finden der Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
- Übliche Lösungsmethode:
  Eine Lösung erraten, dann Polynomdivision.
  Beispiel 2: $\quad 0 = x^3 + 3x - 4$

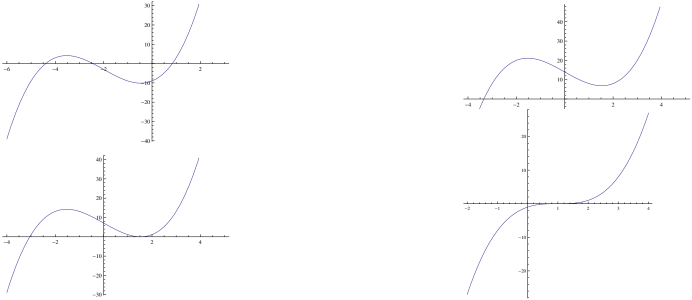
Lösung einer Gleichung dritten Grades

- Lösung der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ bedeutet
  Finden der Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
- Übliche Lösungsmethode:
  Eine Lösung erraten, dann Polynomdivision.
  Beispiel 2: $0 = x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2 + x + 4)$
  Beispiel 1: $0 = x^3 + 6x - 2$
- Gleichungaufstellen ist leichter als lösen:

$$\begin{aligned} 0 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Bild eines Polynoms dritten Grades

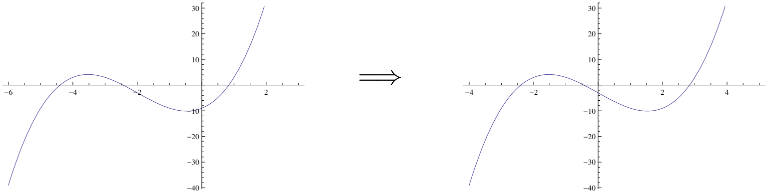
- Polynom 3. Grades: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
  Beispiele für $f(x)$:



- Normalerweise eine oder drei Nullstellen.

Normalform (Beseitigung des Gliedes zweiten Grades)

- Allgemeine Gleichung: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Normalform: $x^3 + px + q = 0$
  Durch Transformation $x \;\longrightarrow\; x - a/3$



- Summe der Nullstellen ergibt 0.
- Entspricht quadratischer Ergänzung:
  Transformation $x \;\longrightarrow\; x - a/2$

$$x^2 + ax + b = 0 \implies \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = 0$$

Algebraische Lösung einer Gleichung dritten Grades

- Gesucht: Lösung der Gleichung $x^3 + px + q = 0$
- Trick: Setze $x = u - v$ und suche “kubische Ergänzung”

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & p\,x & + & q & = & 0 \\ (u-v)^3 & + & 3uv(u-v) & + & v^3 - u^3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} q &= v^3 - u^3 \\ p &= 3uv \end{aligned} \qquad \left(\frac{u^3+v^3}{2}\right)^2 = u^3v^3 + \left(\frac{u^3-v^3}{2}\right)^2$$

- Lösungsformel von
  Cardano (1501–1576) und Tartaglia (1500–1557)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

1. Beispiel: $x^3 + 6x - 2 = 0$

- Cardanoformel mit $p = 6$, $q = -2$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

  ergibt Lösung

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{8+1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{8+1}} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

- Polynomdivision ergibt:

$$\begin{aligned}(x^3 + 6x - 2) \quad &: \quad (x - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) = \\ &= \quad x^2 + x(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16}\end{aligned}$$

2. *Beispiel:* $x^3 + 3x - 4 = 0$

- Lösung raten: $x = 1$, $(x^3 + 3x - 4) : (x - 1) = (x^2 + x + 4)$
- Cardanoformel mit $p = 3$, $q = -4$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

ergibt Lösung

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \approx 0.9999999....$$

- Wir stellen fest, daß

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^3 = 2 + \sqrt{5} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^3 = 2 - \sqrt{5}$$

- Hieraus folgt

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = 1$$

3. *Beispiel:* $x^3 - 6x + 4 = 0$

- Geratene Lösung: $x = 2$, ergibt
$$(x^3 - 6x + 4) : (x - 2) = x^2 + 2x - 2$$
Hat drei reelle Lösungen: $2, -1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}$.
- Cardanoformel mit $p = -6$ und $q = 4$
$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}$$
- Es sei i so ein Objekt (Zahl?), daß
$$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i = -2 + \sqrt{-4}$$
Das klappt, wenn $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $2i = \sqrt{-4}$
- Dann ist
$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}} = \\ &= \sqrt[3]{(1+i)^3} + \sqrt[3]{(1-i)^3} = (1+i) + (1-i) = 2 \end{aligned}$$

Eine Gleichung dritten Grades mit drei reellen Lösungen

- Wir geben uns die Lösungen a, b und $-a-b$ vor:

  $$(x+a+b)(x-a)(x-b) = x^3 - (a^2+ab+b^2)x + ab(a+b) = 0$$

- Die Cardanoformel

  $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

  ergibt

  $$\begin{aligned} \dots\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\dots &= \dots\sqrt{-\frac{(a^2+ab+b^2)^3}{27}+\frac{[ab(a+b)]^2}{4}}\dots = \\ &= \dots\sqrt{-\frac{1}{108}\left[(a-b)(2a+b)(a+2b)\right]^2}\dots \end{aligned}$$

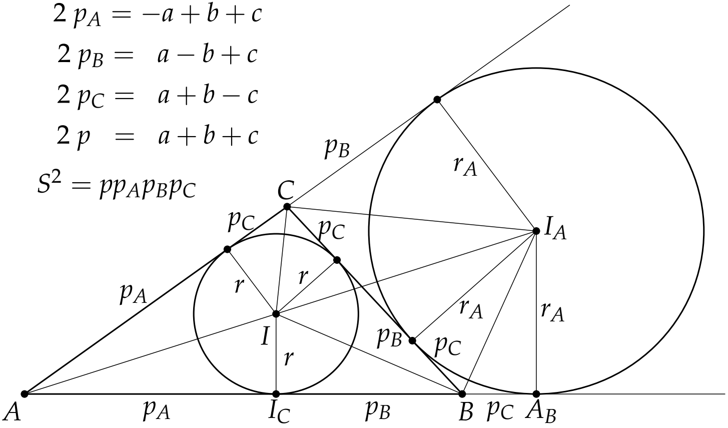
- Genau dann, wenn alle Lösungen reell sind, kann man die Lösung ohne komplexe Zahlen nicht ermitteln!

Algebraische Lösung einer Gleichung vierten Grades

- Normalform der Gleichung: $x^4 + px^2 + qx + r = 0$
- Keine Ergänzung 4. Grades, keine Lösungsformel.
- Aber wir haben Glück:
  Zusammenhang mit Kombinatorik und Dreiecksgeometrie.

Seitenabschnitte p_A, p_B, p_C am Inkreis eines Dreiecks

$$2\,p_A = -a + b + c$$
$$2\,p_B = \;\; a - b + c$$
$$2\,p_C = \;\; a + b - c$$
$$2\,p \;\;= \;\; a + b + c$$
$$S^2 = p p_A p_B p_C$$



Algebraische Lösung einer Gleichung vierten Grades

- Normalform der Gleichung: $x^4 + px^2 + qx + r = 0$
- Dreieck $\triangle ABC$ mit Seiten a, b, c.
  R-Umkreisradius, S-Flächeninhalt
  $$x^4 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 4RSx + S^2 = 0$$
  Lösung dieser Gleichung sind der negative halber Umfang $-p$ und die Seitenabschnitte am Inkreis p_A, p_B, p_C.
- Aus den Lösungen der Gleichung (3. Grades)
  $$\begin{aligned} 0 &= (z + a^2)(z + b^2)(z + c^2) = \\ &= z^3 + (a^2 + b^2 + c^2)z^2 + (a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2)z + a^2b^2c^2 \end{aligned}$$
  kann man einfach die Lösungen der Gleichung 4. Grades bestimmen.
  Wenn man auch noch die Koeffizienten der Gleichungen ineinander umrechnen könnte ...

Lösungsmethode von Gleichungen vierten Grades

- Wir wolen die Gleichungen
$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + qx + r &= 0 \\ x^4 + px^2 - qx + r &= 0 \end{aligned}$$
lösen und betrachten hierzu
- folgende Hilfsgleichung 3. Grades
$$z^3 - 2pz^2 + (p^2 - 4r)z + q^2 = 0$$
und bestimmen die Lösungen z_1, z_2 und z_3.
- Dann sind die Lösungen der Gleichungen 4. Grades die 8 Zahlen
$$\frac{\pm\sqrt{-z_1} \pm \sqrt{-z_2} \pm \sqrt{-z_3}}{2}$$
- Danach Probe!

Geometrische Lösung von Gleichungen vierten Grades

- In der Gleichung $x^4 = px^2 + qx + r$ setzen wir $x^2 = y$ und betrachten das Gleichungssystem

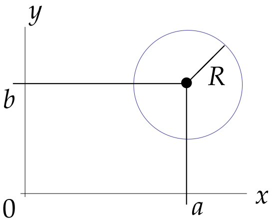
$$\begin{aligned} y^2 - py - qx &= r \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

im zweidimensionalen Koordinatensystem (Einheiten!). Die Lösungsmenge der zweiten Gleichung ist eine Standardparabel. (Zeichnen mit genormter Schablone.) Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist ein Kreis (nach Subtraktion beider Gleichungen).

$$y^2 - (p+1)y + x^2 - qx = r$$

- Schnittpunkte von Parabel und Kreis

Konstruktion des Kreises



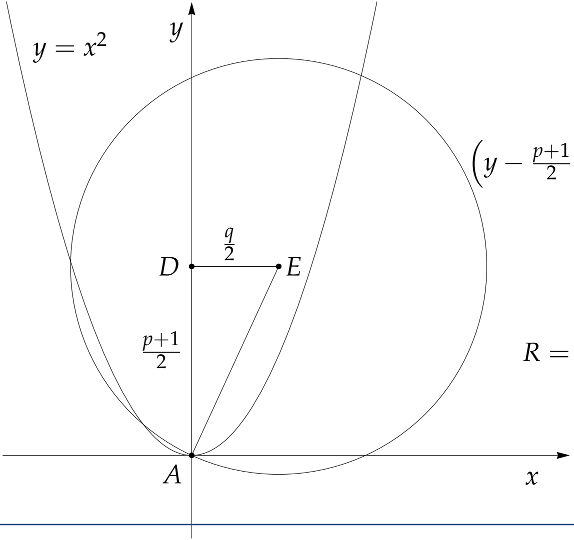
- Kreisgleichung: $(y-b)^2 + (x-a)^2 = R^2$
  Kreis um den Punkt (a, b) mit Radius R.

$$
\begin{aligned}
y^2 - (p+1)y + x^2 - qx &= r \\
\left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{q}{2}\right)^2 &= r + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Zentrum im Punkt $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q}{2}\right)$ und dem Radius

$$R = \sqrt{r + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

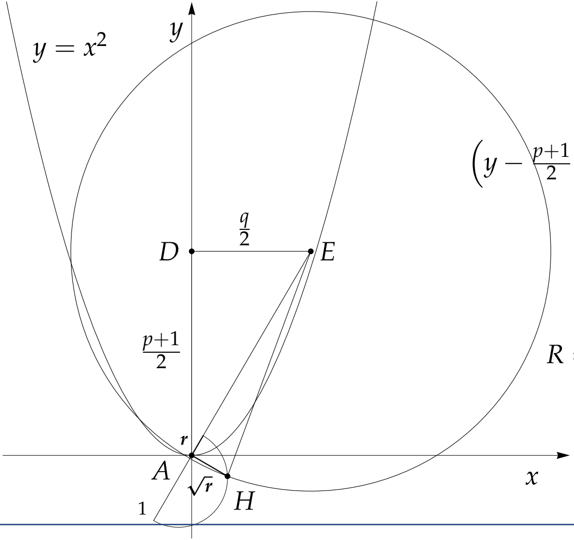
Der Fall $r = 0$ (Gleichung 3. Grades: $x^4 = px^2 + qx$)



$$\left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{q}{2}\right)^2 = \\ = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

$$R = \overline{AE} = \sqrt{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

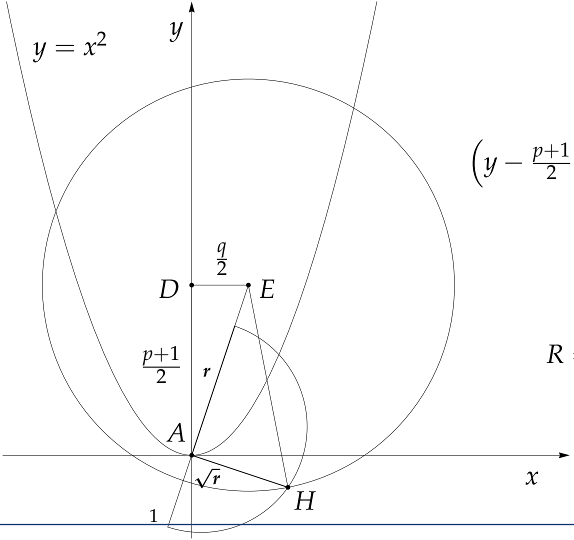
Der Fall $r > 0$, klein (vier reelle Lösungen)



$$\left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{q}{2}\right)^2 = \\ = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + r$$

$$R = \overline{EH} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \sqrt{r}^2}$$

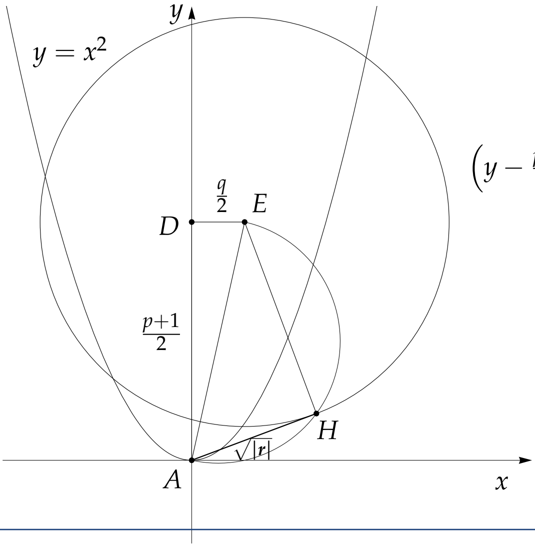
Der Fall $r > 0$, groß (zwei reelle Lösungen)



$$\left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{q}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + r$$

$$R = \overline{EH} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \sqrt{r}^2}$$

Der Fall $r < 0$ (vier reelle Lösungen)



$$\left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{q}{2}\right)^2 = \\ = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 - |r|$$

$$R = \overline{EH} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \sqrt{|r|}^2}$$

Gleichungen höheren Grades

- Gibt es explizite Lösungen der allgemeinen Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ 0 &= a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Nein! Theorie von Galois und Abel
- Keine explizite Lösung von $x^5 - x + a = 0$.
- Aber: Fundamentalsatz der Algebra
  Gleichungen n-ten Grades hat n Lösungen im Komplexen.

Erweiterung der Zahlenbereiche

- Zahlenbereiche: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, das war's.
- Was sind negative Zahlen? $5 \cdot (-3) = (-3) \cdot 5 = -15$
- Was sind rationale Zahlen? Was ist $8^{2/3}$?
- Was sind irrationale Zahlen? Lückenfüller.
- Natürlich sind nur die natürlichen Zahlen.
- Was sind Zahlen? Objekte mit denen man rechnen kann
  D.h., $+$ und $*$ und Rechengesetze (Kommut., Assoz., Distr.)
- Wichtig beim Arbeiten mit Zahlen:
  Nicht nachdenken, sondern rechnen.
  (Richtig rechnen, d.h., an die Regeln halten)

Komplexe Zahlen

- Lösung "unlösbarer" Konstruktionsaufgaben
  Z.B. Konstruktion eines Dreiecks aus 3 Winkelhalbierenden
- Quantenmechanik (Doppelspaltexperiment). Ohne komplexe Zahlen kann man das Experiment erst recht nicht verstehen.
- Die komplexen Zahlen sind nicht anschaulich,
  aber man kann die Welt ohne sie nicht verstehen.
- Durch Beobachtung allein kann man die Welt nicht verstehen.
- Die Welt ist komplex, aber wir beobachten nur ihren Realteil.
- Eulersche Gleichung
  (die 5 wichtigsten mathematischen Konstanten in einer Formel):

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$