Dualität in der Elementaren Geometrie

Vortrag zum Tag der Mathematik 2012

Holger Stephan, Berlin*

Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

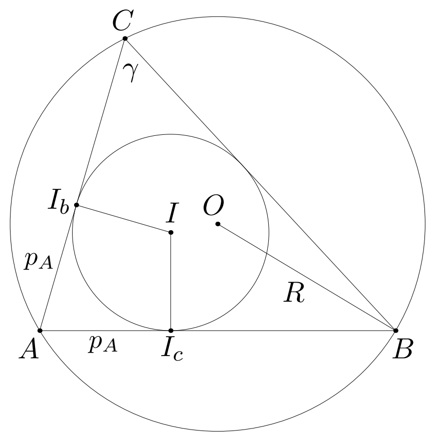
Inhaltsverzeichnis

*e-mail: stephan@wias-berlin.de URL: http://www.wias-berlin.de/stephan/msg.htm

1 Zusammenfassung (aus dem Programmheft)

Dualität ist eines der fruchtbarsten Prinzipien der Mathematik. Einfach gesagt, bedeutet Dualität, daß es zu jedem Ding eine zweite Seite gibt oder daß sich jedes Problem von zwei verschiedenen Seiten aus betrachten läßt. Das hat viele Vorteile: Meist sind beide Seiten verschieden schwer zu lösen. Man kann sich dann die leichtere Möglichkeit zur Lösung auswählen. Hat man eine interessante Eigenschaft eines Objektes gefunden, ist seine duale Eigenschaft oft auch interessant.
In der elementaren oder euklidischen Geometrie sind – im Gegensatz zur projektiven Geometrie – Dualitätsprinzipien oft nicht einfach zu finden. Im Vortrag wird auf verschiedene duale Objekte eingegangen. Unter anderem auf die Dualität zweier Größen, deren Produkt der Flächeninhalt eines Dreiecks ist.
Außerdem geht es um die Dualität zwischen In- und Umkreis im Dreieck und die Dualität zwischen Sehnen- und Tangentenvierecken.
Ein Verständnis dieser Dualität macht die Konstruktion eines solchen vierten Punktes auf dem Umkreis eines Dreiecks, daß dieser Punkt zusammen mit den drei Eckpunkten des Dreiecks ein Sehnentangentenviereck bildet, beinahe zu einer Trivialität. Das war immerhin vor 50 Jahren mal eine IMO-Aufgabe.

Zur Vorbereitung auf den Vortrag, kann man schon mal versuchen, ein Dreieck zu konstruieren, wenn folgende drei Größen gegeben sind (siehe nebenstehende Skizze):
1) Der Winkel γ am Eckpunkt C.
2) Der Umkreisradius R.
3) Der Abstand p_A zwischen Eckpunkt A und dem Punkt I_b, bei dem der Inkreis des Dreiecks die Seite $\overline{AC}$ berührt.



2 Dualität

2.1 Was ist Dualität?

Dualität ist eines der fruchtbarsten Prinzipien in der Mathematik. Einfach gesagt, bedeutet Dualität, daß es zu jedem Ding eine zweite Seite gibt oder daß sich jeder Sachverhalt von zwei verschiedenen Seiten aus betrachten läßt.
Insofern ist Dualität kein mathematisches sondern eher ein philosophisches Prinzip oder ein Denkprinzip.
Dualität ist wie ein Spiegel, in den kann man schauen und sieht die Welt von der anderen Seite. In einem idealen Spiegel, sieht man die Welt einfach noch mal exakt genauso, das ist manchmal nicht sehr interessant. Aber je nachdem, was für einen Spiegel man wählt, kann man die Sache von ganz verschiedenen Seiten sehen.
Das hat viele Vorteile: Meist sind beide Seiten verschieden schwer lösbar. Man kann dann die leichtere zur Lösung auswählen. Hat man eine interessante Eigenschaft eines Objektes gefunden, ist seine duale Eigenschaft oft auch interessant.
Oft hat man ein Problem erst dann richtig verstanden, wenn man ein Dualitätsprinzip darin gefunden hat.
Zu den beiden Seiten des Problems gibt es eine Operation, die die Größen des Problems in die Größen des dualen Problems umrechnet.

2.2 Beispiele für Dualität

2.2.1 Der indirekte Beweis

Ein Beweis ist eine logische Schlußkette, bei der aus gegebenen Voraussetzungen $a, b, ...$ durch "wenn ... dann ..." Schlüsse die Aussage A bewiesen wird, d.h. gezeigt wird, daß die Aussage A wahr ist.
Bei der indirekten Beweisführung zeigt man nicht, daß die Aussage A wahr ist, sondern daß die Aussage (*nicht* A) falsch ist, indem man sie zu einem Widerspruch führt.
Das ist formal äquivalent, da hier das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten wirkt, d.h, man nimmt an, daß genau eine der beiden Aussagen A oder (*nicht* A) wahr und die andere falsch sein muß. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.
In der Mengentheorie entspricht das der Komplementbildung. Anstelle eine Menge M zu betrachten, betrachten man das Komplement der Menge M "zum Rest der Welt". Diese Komplementbildung vermittelt eine wichtige Dualität.
Mit anderen Worten ausgedrückt bedeutet das: Es ist gleichgültig, ob ich die Eigenschaften der Elemente der Menge M untersuche, oder ob ich die Eigenschaften aller Elemente untersuche, die nicht in M liegen.
Das ist ein reines Denkprinzip. Im realen Leben hilft das nicht unbedingt weiter. Möchte man sich z.B. vergewissern, daß alle Raben schwarz sind, d.h., möchte man die Aussage "Alle Raben sind schwarz." empirisch testen, so versichert man sich der Richtigkeit dieser Aussage durch jeden schwarzen Raben den man sieht. Die duale Aussage, "Alles was nicht schwarz ist, ist kein Rabe.", empirisch zu testen, ist nicht besonders befriedigend. Das würde bedeutet, daß man sich dadurch versichert, daß alle Raben schwarz sind, bei jedem gelben Auto, rotem Haus, ... das man sieht.
Die formale Äquivalenz der Aussagen widerspiegelt sich in der Realität nicht wider wegen des krassen Ungleichgewichts zwischen der Menge aller Raben und dem Rest der Welt. Deshalb ist

ein Dualität oft nicht offensichtlich und das Erkennen einer Dualität oft eine große Denkleistung.

Die Stärke der indirekten Beweisführung sieht man vor allem bei reinen Existenzsätzen, d.h., bei mathematischen Sätzen, die die Existenz eines Objektes behaupten, ohne einen konstruktiven Weg zum Finden dieses Objektes anzugeben.

Ein Beispiel ist der Beweis des Schubfachschlusses (oder auch Dirichletprinzip genannt):

Man hat n Schachteln und verteilt darauf $m > n$ Kugeln. Dann gibt es eine Schachtel mit mehr als einer Kugel.

Dieser offensichtliche Satz ist nur sehr umständlich auf direktem Wege zu beweisen. Indirekt ist das ganz einfach: Angenommen, die Aussage ist falsch, d.h., in jeder Schachtel befindet sich höchstens eine Kugel, dann kann es nur höchstens n Kugeln geben. Das ist ein Widerspruch zu $m > n$.

2.2.2 Der Abstand

Ein geometrisches Beispiel für eine interessante und tiefgründige Dualität ist die Bestimmung des kürzesten Abstandes zwischen einem Punktes P von einer Geraden g im Raum.

Wir bezeichnen die Abstandsfunktion zwischen zwei Objekten mit dist. Dann ist klar, daß

$$\operatorname{dist}(P, g) = \min_{Q \in g} \operatorname{dist}(P, Q)$$

d.h., der gesuchte kürzesten Abstand ist der kleinste Abstand zwischen dem Punkt P und irgendeinem Punkt Q auf der Geraden.

Nicht ganz so offensichtlich ist, daß man diesen Abstand auch – dual – über ein Maximum bestimmen kann. Es ist nämlich auch – hier sei $\mathcal{E}$ eine Ebene –

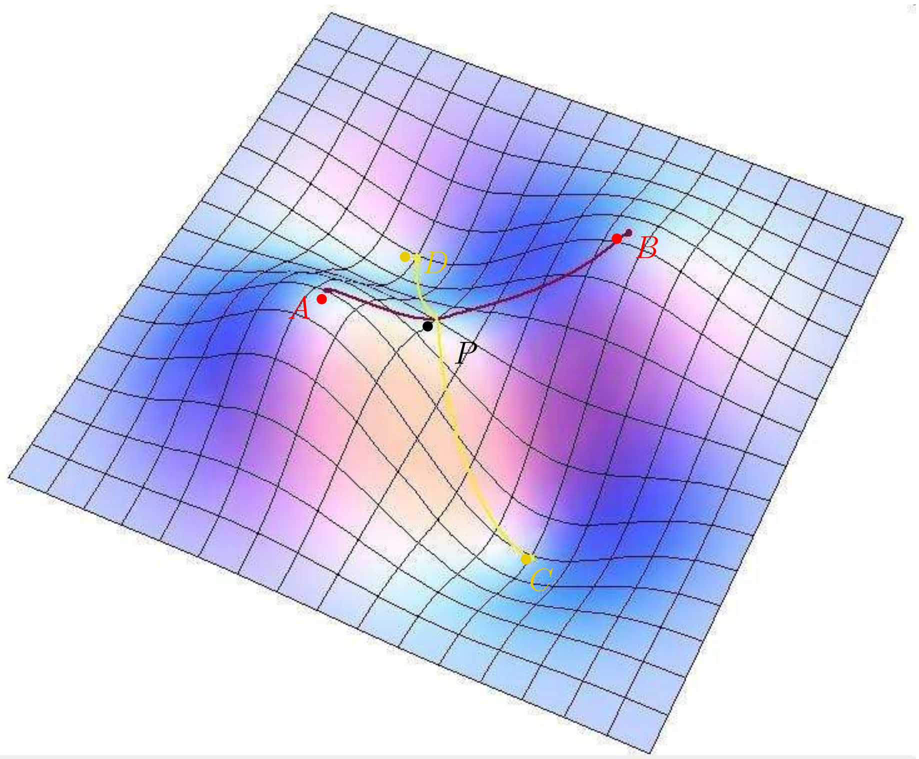
$$\operatorname{dist}(P, g) = \max_{\mathcal{E} \ni g} \operatorname{dist}(P, \mathcal{E})$$

d.h., der gesuchte Abstand ist der größtmögliche Abstand zwischen dem Punkt P und irgendeiner Ebene, die die Gerade g enthält.

Diese grundlegende Dualität – verallgemeinert auf Objekte beliebiger Dimension – ist wichtig in der linearen Programmierung – einem wichtigen Teilgebiet der Mathematik.

2.2.3 Pässe im Gebirge

Im Gebirge gibt es Punkte (im Bild der Punkt P) – sogenannte Pässe –, bei denen sich viele Wege kreuzen. Dort häufen sich z.B. die Touristen, auch wenn man auf den sonstigen Wegen kaum jemanden trifft. Warum ist das so?



Dazu betrachten wir vier Dörfer. Zwei auf den Gipfeln A und B und zwei in den Tälern, C und D. Welche Wegen benutzen Menschen, die von A nach B gelangen wollen? Sie müssen auf alle Fälle zuerst bergab gehen und dann wieder bergauf. Um nicht unnötig durchs Gebirge klettern zu müssen, werden sie nur soviel bergab und bergauf gehen wollen, wie unbedingt nötig ist. Sie werden deshalb so gehen, daß der tiefste Punkt des Weges möglichst weit oben liegt. Es gibt also einen Punkt, der der höchste aller tiefsten Punkte eines Weges von A nach B ist.
Analog werden Menschen, die von C nach D wollen nicht unnötig weit den Berg hinauf klettern wollen. Für deren Wege gibt es einen Punkt, der der tiefste aller höchsten Punkte eines Weges von C nach D ist.
Interessanterweise sind diese beiden Punkte identisch. Es ist also

$$P = \min_{\text{Wege}} \max_{\overline{CD}} = \max_{\text{Wege}} \min_{\overline{AB}}$$

Diese Ausdrücke sind so zu verstehen (am Beispiel des ersten Ausdruckes): Für jeden Weg von C nach D wählt man den höchsten Punkt. Das ist $\max\limits_{\overline{CD}}$. Dann betrachtet man alle möglichen Wege von C nach D. Für jeden dieser Wege erhält man einen solchen höchsten Punkt. Jetzt bestimmt man den tiefsten unter ihnen. Das ist $\min\limits_{\text{Wege}}$.
In jedem "normalen" Gebirge, sind das Maximum über alle Minima gleich dem Minimum über alle Maxima. Ist das der Fall, sagt man, daß ein Minimax-Theorem erfüllt ist.
Das ist die fundamentale Dualität in der Variationstheorie, einem wichtigen Teilgebiet der Analysis. Der entsprechende Punkt zu einem Minimax-Theorem wird Sattelpunkt genannt.

3 Einfachste multiplikative Dualität in der Geometrie

3.1 Dualität bei Produkten

Eine weitere wichtige Dualität in der Mathematik hängt mit dem Produkt von zwei verschiedenen Größen zusammen. Eigentlich ist es einem Produkt egal, was für Zahlen miteinander multipliziert werden. Häufig haben die Größen – wenn sie reale Dinge beschreiben – aber völlig verschiedene Bedeutungen. Z.B. ergibt das Produkt aus Preis und Menge die Kosten. Für sich genommen, sagt der Preis von Waren $p_1, p_2, ..., p_n$ noch nichts über die Gesamtkosten aus, genausowenig, wie die benötigten Mengen $m_1, m_2, ..., m_n$. Die Größe

$$K = m_1 p_1 + m_2 p_2 + ... + m_n p_n$$

ergibt die Gesamtkosten. Diese Konstruktion kommt überall in der Mathematik vor und wird Skalarprodukt genannt. Es bildet aus zwei Mengen mit je n Elementen unterschiedlichster Natur eine reelle Zahl K. Die Größen $p_1, p_2, ..., p_n$ und $m_1, m_2, ..., m_n$ kann man als dual zueinander betrachten.
In der Geometrie ist ein Beispiel hierfür der Flächeninhalt. Er ist stets das Produkt aus zwei Streckenlängen, die zwar in der gleichen Einheit gemessen werden. Die entsprechenden Strecken zeigen aber in verschiedene Richtungen.

3.2 Der Flächeninhalt eines Dreiecks als Produkt dualer Größen

Wir betrachten ein gegebenes Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen a, b, c und dem Flächeninhalt $S_{\triangle ABC}$. Der Flächeninhalt eines Dreiecks läßt sich z.B. als halbes Produkt aus eine Seite und der entsprechenden Höhe berechnen. Die Höhen seien h_A, h_B und h_C, die Seiten a, b und c. Um nicht immer die Hälften zu betrachten setzen wir $a_2 = a/2$, $b_2 = b/2$, $c_2 = c/2$. Es gilt

$$S_{\triangle ABC} = a_2 h_A = b_2 h_B = c_2 h_C \tag{1}$$

Angenommen, das Produkt zweier Größen x und y ergibt den Flächeninhalt eines Dreiecks: $S = xy$. Dann bezeichnen wir die Größen x und y als dual zueinander. Wenn die Längeneinheit so gewählt ist, daß der Flächeninhalt unseres Dreiecks gerade 1 ist, dann ist $x = \frac{1}{y}$. Wenn wir einen Zusammenhang verschiedener x-Größen haben, dann erhalten wir einen der dualen y-Größen, indem wir überall die x Größen durch $\frac{1}{y}$ ersetzen.

3.2.1 Die Heronsche Flächenformel für die Höhen

Sind von einem Dreieck die Seiten gegeben, dann läßt sich der Flächeninhalt nach der Heronschen Flächenformel berechnen:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Führt man die Größen (im weiteren stellt sich heraus, daß das sehr sinnvoll ist)

$$\begin{aligned} p &= a_2 + b_2 + c_2 = \frac{a+b+c}{2} \\ p_A &= -a_2 + b_2 + c_2 = \frac{-a+b+c}{2} \\ p_B &= a_2 - b_2 + c_2 = \frac{a-b+c}{2} \\ p_C &= a_2 + b_2 - c_2 = \frac{a+b-c}{2} \end{aligned}$$

ein, dann ist die Heronschen Flächenformel äquivalent zu

$$S^2 = p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C = \tag{2}$$

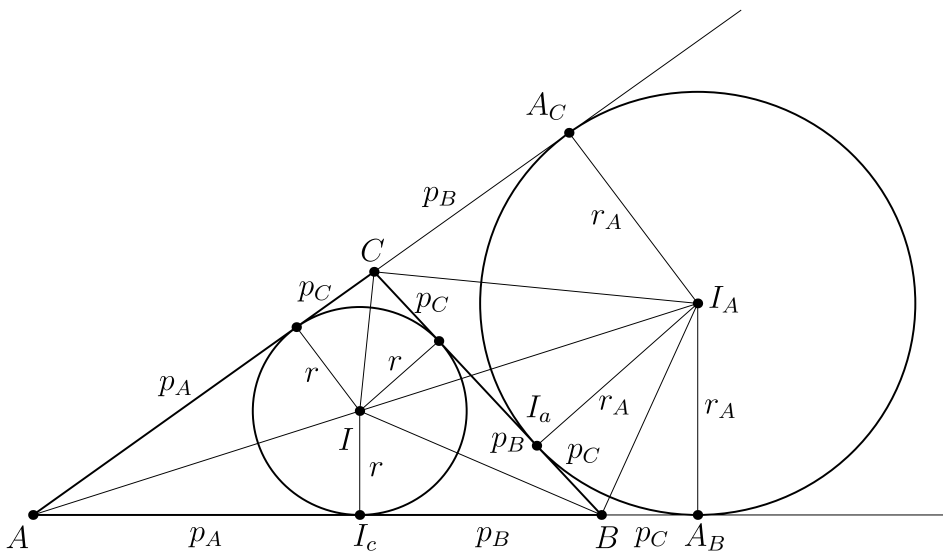
$$= (a_2 + b_2 + c_2)(-a_2 + b_2 + c_2)(a_2 - b_2 + c_2)(a_2 + b_2 - c_2) \tag{3}$$

Die Größe p ist der halbe Umfang, die Größen p_A, p_B, p_C sind Seitenabschnitte, was im nächsten Punkt deutlich wird.
Ersetzen wir in (3) die halben Seiten durch die dualen Höhen, entsprechend der Formel (1), also $a_2 \Longleftrightarrow \frac{1}{h_A}$, $b_2 \Longleftrightarrow \frac{1}{h_B}$, $c_2 \Longleftrightarrow \frac{1}{h_C}$, so erhalten wir eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks, falls die Höhen gegeben sind:

$$\frac{1}{S^2} = \left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}\right)\left(-\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}\right)\left(\frac{1}{h_A}-\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}\right)\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}-\frac{1}{h_C}\right)$$

3.2.2 Der Flächeninhalt mit In- und Ankreisen

Neben der Formel (1) gibt es noch andere Längen im Dreieck, die miteinander multipliziert den Flächeninhalt ergeben. Dazu zeichnen wir in ein Dreieck den Inkreis mit Radius r und einen Ankreis an die Seite BC mit Radius r_A. Die Radien der beiden anderen Ankreise seien r_B und r_C.



Man kann leicht nachprüfen, daß die Seitenabschnitte, die durch die Berührungspunkte von In- und Ankreis entstehen, gerade die Größen p_A, p_B, p_C sind. Es gelten nämlich die offensichtlichen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} a &= 2a_2 = p_B + p_C \\ b &= 2b_2 = p_C + p_A \\ c &= 2c_2 = p_A + p_B \end{aligned}$$

aus denen sich leicht die Ausdrücke für p_A, p_B, p_C bestimmen lassen. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} p &= p_A + p_B + p_C \\ p_A &= p - 2a_2 \\ p_B &= p - 2b_2 \\ p_C &= p - 2c_2 \end{aligned}$$

Es läßt sich jetzt leicht nachprüfen, daß

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABI} + S_{\triangle BCI} + S_{\triangle CAI} = a_2 r + b_2 r + c_2 r = pr$$

und

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle AA_BI_A} + S_{\triangle AA_CI_A} - S_{\triangle BA_BI_A} - S_{\triangle BI_aI_A} - S_{\triangle CI_aI_A} - S_{\triangle CA_CI_A} = \\ &= pr_A - p_Cr_A - p_Br_A = r_Ap_A \end{aligned}$$

und die analogen Formeln für die anderen Ankreise.
Damit erhalten wir folgende Darstellungen für den Flächeninhalt

$$S = a_2h_A = b_2h_B = c_2h_C = pr = p_Ar_A = p_Br_B = p_Cr_C \tag{4}$$

Es ergeben sich weitere 4 Paare zueinander dualer Größen.
Damit läßt sich z.B. die Formel $h_A = \frac{2r_Br_C}{r_B+r_C}$, die einen Zusammenhang zwischen einer Höhe und zwei Ankreisradien beschreibt, leicht beweisen. Aus $2a_2 = p_B + p_C$ folgt, wenn wir $a_2 \Longleftrightarrow \frac{1}{h_A}$, $p_B \Longleftrightarrow \frac{1}{r_B}$ und $p_C \Longleftrightarrow \frac{1}{r_C}$ ersetzen,

$$\frac{2}{h_A} = \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} ,$$

woraus nach leichtem Umformen $h_A = \frac{2r_Br_C}{r_B+r_C}$ folgt.
Analog gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} p = p_A + p_B + p_C &\Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} \\ p = a_2 + b_2 + c_2 &\Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} \\ p_A = p - 2a_2 &\Longrightarrow \frac{1}{r_A} = \frac{1}{r} - \frac{2}{h_A} \end{aligned}$$

3.2.3 Zwei Paare dualer Quadrupel

Aus der Heronschen Formel (2) und (4) folgt $S^2 = pp_Ap_Bp_C = S^4/(rr_Ar_Br_C)$ und damit

$$S^2 = pp_Ap_Bp_C = rr_Ar_Br_C .$$

Das Produkt der vier Größen p, p_A, p_B, p_C ist also gleich dem Produkt der vier dazu dualen Größen r, r_A, r_B, r_C. Die Quadrupel (p, p_A, p_B, p_C) und (r, r_A, r_B, r_C) bestehen jeweils aus einer Größe, die im Dreieck nur einmal vorkommt – nämlich p und r – und aus drei zyklischen Größen. Betrachten wir die Formeln (4), so gibt es dort 7 Produkte, die jeweils gleich dem Flächeninhalt sind. Es fällt sofort auf, daß aus ästhetischen Gründen dort ein Produkt $S = xy$, fehlt. Die Unbekannten x und y sollten Größen sein, die es nur einmal gibt und mit den zyklischen Größen a_2, b_2, c_2 und h_A, h_B, h_C ebenfalls Quadrupel (x, a_2, b_2, c_2) und (y, h_A, h_B, h_C) bilden. Für die Größe x sollte $x = \frac{S^2}{a_2b_2c_2}$ gelten. Mit der bekannten Formel $4RS = abc$ (hier ist R der Umkreisradius) folgt

$$x = \frac{S^2}{a_2b_2c_2} = \frac{8S^2}{abc} = \frac{2S}{R}$$

Es gilt also

$$S = \frac{R}{2} \cdot x$$

Es bietet sich also als eine der beiden unbekannten Größen $y = \frac{R}{2} =: R_2$ der halbe Umkreisradius an. Die gesuchte andere Länge $x = \frac{S}{R_2}$ läßt sich ebenfalls im Dreieck finden. Es ist $\frac{S}{R_2} = u_H$ der halbe Umfang des Dreiecks, das durch die Fußpunkte der Höhen gebildet wird – das sogenannte Höhenfußpunktsdreieck. Halb so groß wie der Umkreisradius ist der Radius eines anderen besonderen Kreises. Dieser Kreis heißt Feuerbachscherkreis oder Neun-Punkte-Kreis, weil auf ihm die drei Mittelpunkte der Seiten, die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte und die drei Fußpunkte der Höhen liegen. Wegen der letzten drei Punkte ist dieser Kreis also auch der Umkreis den Höhenfußpunktsdreiecks.
Zusammengefaßt erhalten wir folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} S &= R_2 u_H = a_2 h_A = b_2 h_B = c_2 h_C = pr = p_A r_A = p_B r_B = p_C r_C \\ S^2 &= p p_A p_B p_C = r r_A r_B r_C = R_2 a_2 b_2 c_2 = u_H h_A h_B h_C \ , \end{aligned}$$

die keine weiteren Wünsche offen lassen.

3.3 Dualität: Punkt $\Longleftrightarrow$ Gerade

Eine Dualität versteckt sich oft dann, wenn zwei Objekte zwar verschiedene Namen haben, aber sich ähnlich verhalten. Das ist z.B. bei Punkten und Geraden so. Eine Gerade wird nämlich durch zwei Punkten definiert und ein Punkt ist der Schnittpunkt zweier Geraden. Das würde eine schöne Dualität liefern, gäbe es nicht einen Schönheitsfehler: Parallele Geraden schneiden sich nicht. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten: Erstens – und das machen Mathematiker besonders gern – man definiert die Welt um und postuliert, daß sich auch parallele Geraden gefälligst zu schneiden haben – wenigstens im Unendlichen. Das führt auf das Teilgebiet der Geometrie – die projektive Geometrie. In ihr ist die Welt nicht so, wie sie ist, sondern so, wie wir sie sehen, nämlich perspektivisch, projektiv (Eisenbahnschienen nähern sich immer mehr an und schneiden sich schließlich am Horizont). Der Vorteil ist, daß sich in dieser Geometrie tatsächlich in jedem Satz die Wörter Punkt und Gerade vertauschen lassen und der Wahrheitsgehalt des Satzes bleibt erhalten. Der Nachteil ist, daß solche Größen wie Längen oder Winkel keinen großen Sinn mehr haben (sie ändern sich in Abhängigkeit davon, aus welcher Richtung wir schauen).
Die zweite Möglichkeit ist, man akzeptiert die Welt so wie sie ist und berücksichtigt, daß man ideale Dualität nicht hat – der Spiegel ist nicht ideal. Das werden wir im folgenden machen.

4 Dualität: 3 Punkte $\Longleftrightarrow$ 3 Geraden

Statt der Dualität zwischen einem Punkt und einer Geraden beschäftigen, betrachten wir gleich Tripel davon.

4.1 Was sind Umkreis und Inkreis im Dreieck

Drei Punkte – wenn sie nicht auf einer Geraden liegen – definieren ein Dreieck, drei Geraden – wenn keine zwei parallel sind oder sich alle drei in einem Punkt schneiden – definieren ein Dreieck ebenfalls. Jedes Dreieck hat einen Umkreis und einen Inkreis. Diese beiden Kreise hängen mit der Dualität von Punkten und Geraden zusammen. Welche Gemeinsamkeiten zwischen Umkreis und Inkreis gibt es?

Der Inkreis berührt die Seiten, der Umkreis enthält die Eckpunkte. Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Die Mittelsenkrechte ist die Symmetrieachse der Seite, die Winkelhalbierenden ist die Symmetrieachse des Winkels.

Zusammengefaßt ergeben sich folgende Eigenschaften:

Umkreis	Inkreis
Eckpunkte darauf	Seiten tangieren
Mittelsenkrechte	Winkelhalbierenden
Seiten	Winkel
Seitensymmetrie (SM)	Winkelsymmetrie (SW)

Wir wollen die Objkete in der Tabelle, die auf einer Zeile stehen als zueinander dual betrachten. Insbesondere stehen in der letzten Zeile zwei Transformationen, die wir als zueinander dual bezeichnen.

Diese Dualität hat aber Schönheitsfehler, die genau damit zusammenhängen, daß die Dualität zwischen Punkten und Geraden in der Euklidischen Geometrie wegen der Parallelität nicht perfekt ist. Ein Schönheitsfehler ist, daß im Dreieck die Winkelsumme konstant ist, es aber eine konstante Streckensumme nicht gibt.

Außerdem gibt es zu drei Punkten genau einen Kreis, der diese Punkte enthält, wogegen es zu drei Geraden vier Kreise gibt, für die die Geraden Tangenten sind. Das sind neben dem Inkreis noch die drei Ankreise.

4.2 Umkreis und Inkreis im Viereck

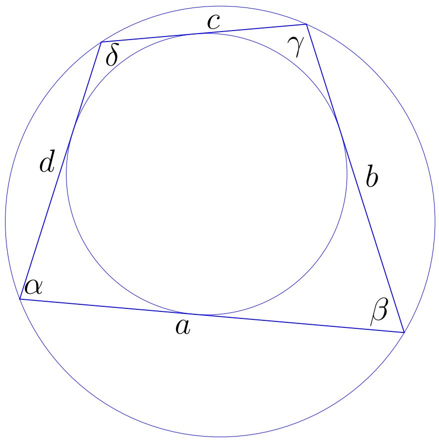
Vier Punkte müssen nicht auf einem Kreis liegen, genau wie es keinen Kreis geben muß, der vier gegebene Geraden berührt. Es gibt im allgemeinen also zu einem Viereck keinen In- oder Umkreis.

Ein Viereck mit einem Umkreis ist ein Sehnenviereck. Die charakterisierende Eigenschaft ist, daß sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen.

Ein Viereck mit einem Ankreis ist ein Tangentenviereck. Die charakterisierende Eigenschaft ist, daß die Summe der Längen zweier gegenüberliegender Seiten gleichgroß ist. Das stimmt nicht ganz mit der charakterisierenden Eigenschaft von Sehnenvierecken überein. Dort ist zwar auch die Summe gegenüberliegender Winkel gleichgroß, aber auch noch wegen der Winkelsumme im Viereck gegeben.

Das hat zur Folge, daß man ein Sehnenviereck aus den vier Seitenlängen konstruieren kann (was allerdings schwer ist), ein Tangentenviereck kann man aus vier Winkel aber nicht konstruieren, genau wie man ein Dreieck nicht aus den Winkeln konstruieren kann. Überhaupt ist es beim Tangentenviereck nicht offensichtlich, aus welchen Größen man es natürlicherweise konstruieren könnte. Noch schwieriger ist es, ein Sehnentangentenviereck zu konstruieren, sogar ohne vorgegebene Größen: Zeichne irgendein Viereck, daß einen In- und eine Umkreis hat.

Auch in einem Sehnenviereck wird der Mittelpunkt des Umkreises durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten definiert, genau wie der Mittelpunkt des Inkreises eines Tangentenviereck durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bestimmt ist.

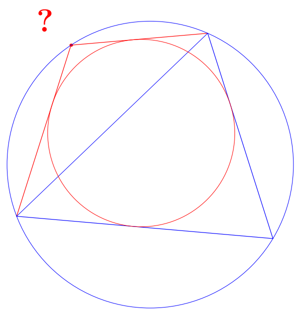


- Sehnenviereck (SV) = Viereck mit Umkreis
- Tangentenviereck (TV) = Viereck mit Inkreis
- Sehnentangentenv. (STV) = 4-Eck mit Um- und Inkreis
- SV: $\alpha + \gamma = \beta + \delta (= 180°)$
- TV: $a + c = b + d$
- Konstruktionen:
  - SV: Aus a, b, c, d ? Ja!
  - TV: Aus $\alpha, \gamma, \beta, \delta$? Nein!
  - STV: Schwer! Egal woraus.

Ein Sehnentangentenviereck ist ein Viereck, das einen In- und einen Umkreis hat. Was die Kreise betrifft, ist das Sehnentangentenviereck also das Dreieck unter den Vierecken. Hier vereinigen sich zwei eigentlich getrennte Welten – die Welt der Winkelhalbierenden und die Welt der Mittelsenkrechten – in einem Objekt.
Das macht den Umgang mit Sehnentangentenvierecken ziemlich schwer. Kein Wunder, daß es in dem Zusammenhang eine IMO-Aufgabe gab.

4.2.1 Eine Aufgabe aus der IMO von 1962

Aufgabe A: (IMO 1962)
Gegeben (blau) sind 3 Punkte (Dreieck) und ein Kreis, auf dem alle 3 Punkte liegen (Umkreis).
Gesucht (rot) ist ein 4. Punkt auf dem Kreis derart, daß die 4 Punkte ein STV bilden.



Die Frage ist also: Wann ist ein SV ein STV? Die Lösungsidee ist nun folgende: Wir betrachten anstelle der gestellten Aufgabe eine duale Aufgabe, hoffen, daß diese einfacher zu lösen ist und versuchen den dualen Lösungsweg zu bilden und auf die ursprüngliche Aufgabe anzuwenden.

4.2.2 Die Bestimmung der dualen Aufgabe

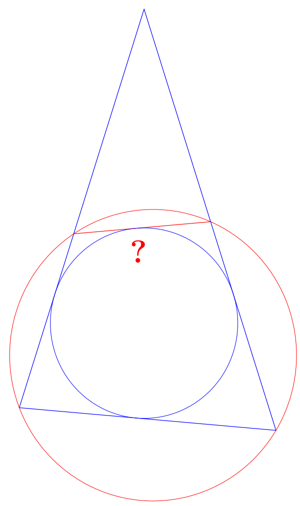
Um die duale Aufgabe zu bestimmen, formulieren wir alle Begriffe in der Aufgabe entsprechend der Tabelle auf Seite 10 um.

Aufgabe A: (IMO 1962)	**Die duale Aufgabe A':**
Gegeben sind 3 Punkte (Dreieck) und	Gegeben sind 3 Geraden (Dreieck) und
ein Kreis, auf dem alle 3 Punkte liegen (Umkreis).	ein Kreis, der alle 3 Geraden berührt (Inkreis).
Gesucht ist ein 4. Punkt auf dem Kreis derart,	Gesucht ist eine 4. Gerade, die den Kreis berührt derart,
daß die 4 Punkte ein STV bilden.	daß die 4 Geraden ein STV bilden.

Wir fragen also nicht, wann ein Sehnenviereck ein Sehnentangentenviereck ist, sondern wann ein Tangentenviereck ein Sehnentangentenviereck ist. Und das läßt sich viel einfacher beantworten.

4.2.3 Die duale Aufgabe

Duale Aufgabe A':
Gegeben (blau) sind 3 Geraden (Dreieck) und ein Kreis, der alle 3 Geraden berührt (Inkreis).
Gesucht (rot) ist eine 4. Gerade, die den Kreis berührt derart, daß die 4 Geraden ein STV bilden.



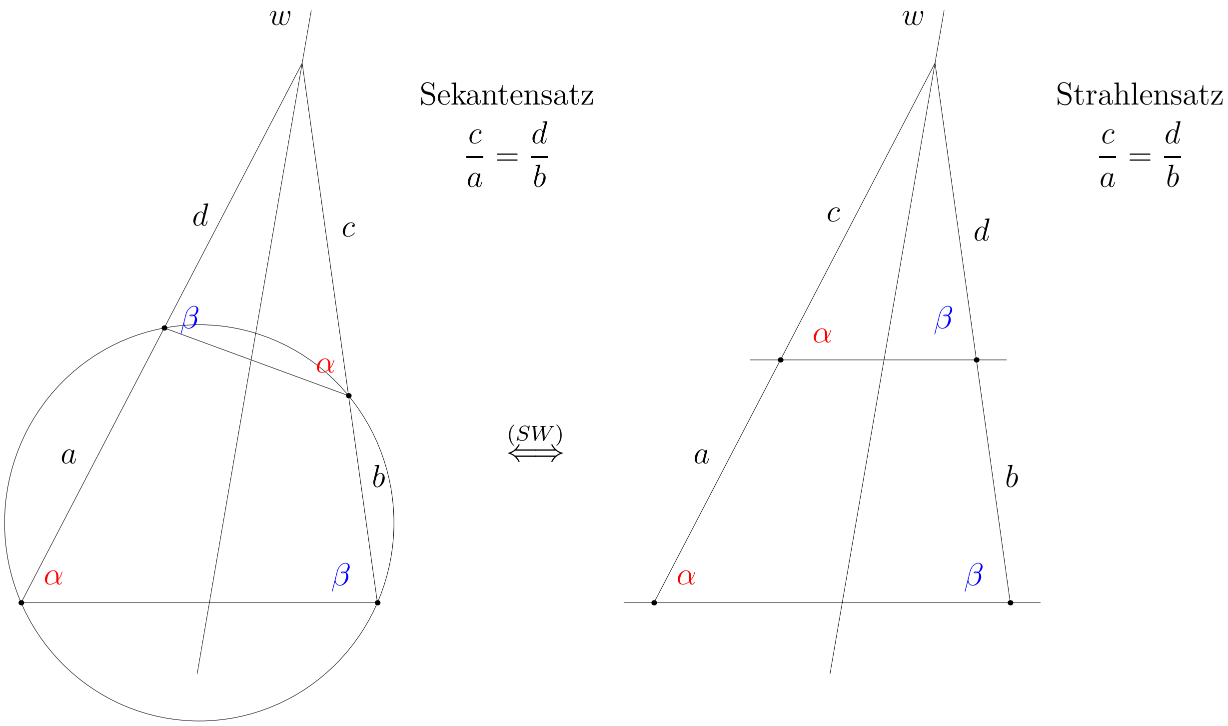
Gesucht ist also die rote Strecke derart, daß das entstehende Viereck ein Sehnenviereck (roter Kreis) ist, die Eigenschaft, ein Tangentenviereck zu sein dabei aber erhalten bleibt.
Um eine Idee dafür zu bekommen, schauen wir wieder in die Tabelle auf Seite 10 – und zwar in die rechte Spalte, denn die gehört zur dualen Aufgabe A' – und finden dort: Spiegeln an der Winkelhalbierenden (SW).

Wir nehmen also an, daß wir ein Sehnentangentenviereck haben und spiegeln das obere Dreieck, das aus zwei blauen und einer roten Seite gebildet wird an der Winkelhalbierenden des blauen Winkels und erhalten einen erstaunlichen Zusammenhang, nämlich den zwischen

4.2.4 Strahlensatz und Sekantensatz

Der Strahlensatz untersucht Streckenverhältnisse, wenn zwei Strahlen zwei parallele Geraden schneiden, der Sekantensatz untersucht Streckenverhältnisse, wenn zwei Strahlen einen Kreis schneiden. Wenn man beides so in einem Satz formuliert, sieht man sofort, daß das nach einem Zusammenhang riecht, obwohl in der Schule normalerweise beide Sätze so gelehrt werden, als hätten sie nichts miteinader zu tun. (Falls der Sekantensatz überhaupt in der Schule gelehrt wird).

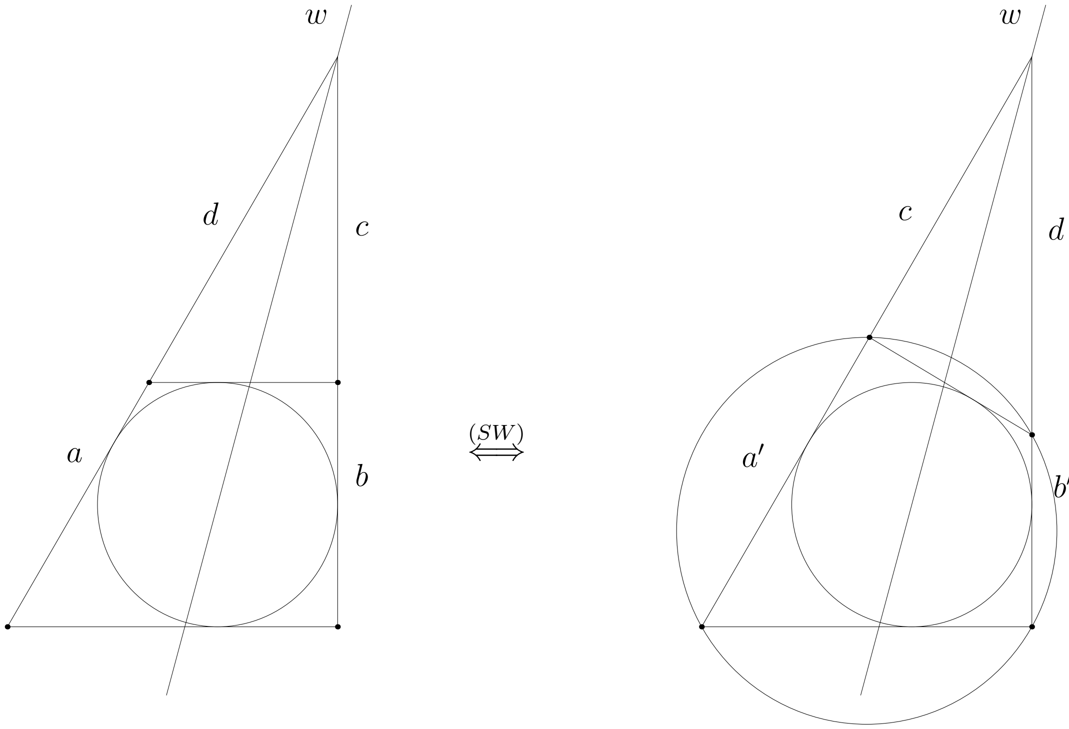
Beide Situationen sind im folgenden Bild dargestellt.



Im Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180°. Deshalb sind die blauen und roten Winkel gleich. Nach dem Spiegeln (SW) an der Winkelhalbierenden w ergänzen sich jetzt nebeneinanderliegende Winkel zu 180°. Das bedeutet einfach, daß die Geraden jetzt parallel sind, weil die Winkel Stufenwinkel sind. Nach der Spiegelung erhalten wir also ein Trapez.

Und umgekehrt: Wenn wir ein Trapez gegeben haben und eine der parallelen Seiten an der Winkelhalbierenden des Winkels, (der durch die beiden nicht parallelen Seiten gebildet wird,) spiegeln, erhalten wir ein Sehnenviereck.

4.2.5 Konstruktion eines Sehnentangentenviereck aus einem Tangentenviereck

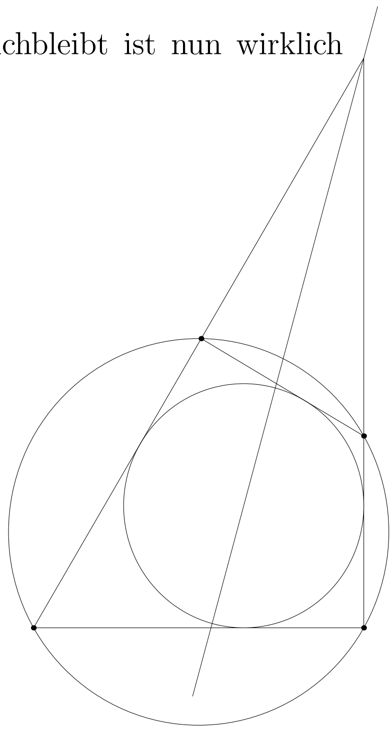


Offensichtlich entsteht also aus einem Trapez ein Sehnenviereck. Noch nicht klar ist aber, ob auch die Tangenteneigenschaft erhalten bleibt, ob also bei der Spiegelung aus einem Trapez mit Inkreis – das ist ein spezielles Trapez – auch ein Sehnenviereck mit Inkreis, also ein Sehnentangentenviereck entsteht. Das muß eigentlich so sein, da die Spieglung an einer Winkelhalbierenden die Tangenteneigenschaft natürlich erhält. Es läßt sich aber auch einfach nachrechnen:

$$a + b = (a + d) + (b + c) - (d + c) = (a' + c) + (b' + d) - (d + c) = a' + b'$$

Daß die Summe der beiden anderen gegenüberliegenden Seiten gleichbleibt ist nun wirklich offensichtlich. Damit erhalten wir folgende

4.2.6 Lösung der dualen Aufgabe A’

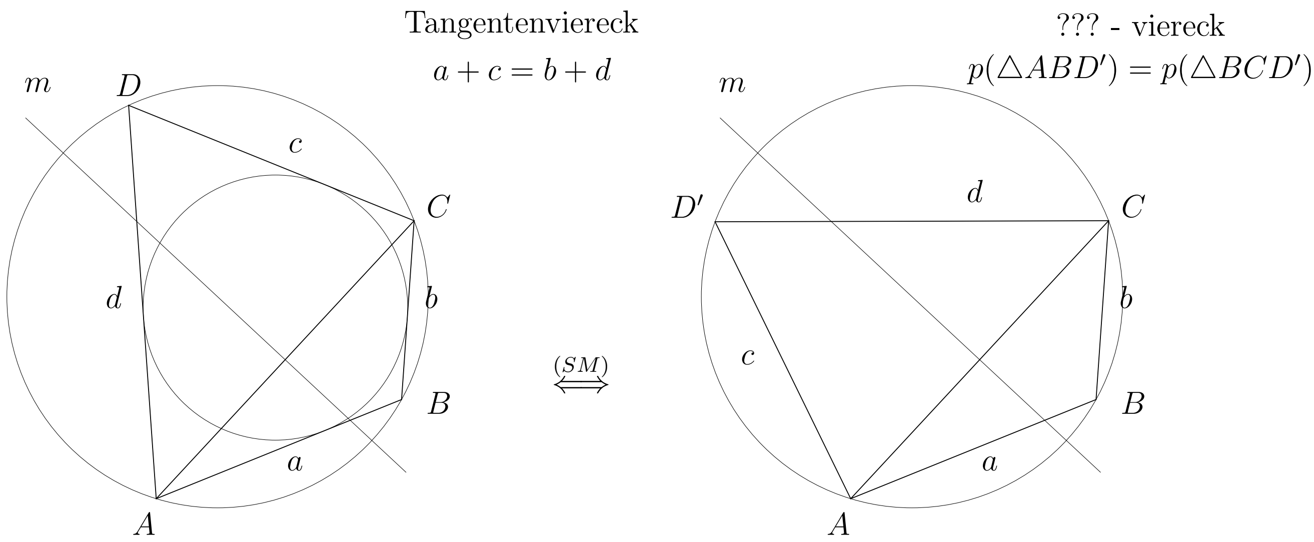


- **Duale Aufgabe A’:**
  Gegeben sind 3 Geraden (Dreieck) und ein Kreis, der alle 3 Geraden berührt (Inkreis).
  Gesucht ist eine 4. Gerade, die den Kreis berührt derart, daß die 4 Geraden ein STV bilden.

- Konstruktion:
  - Gegeben: Dreieck mit Inkreis
  - Konstruiere Tangente an Inkreis, parallel zur Grundseite
  - Spiegle (SW) an der Winkelhalbierenden

4.2.7 Spiegelung an der Mittelsenkrechten

Um die ursprüngliche Aufgabe A zu lösen, müssen wir untersuchen, was die duale Operation, nämlich die Spiegelung an der Mittelsenkrechten (SM) aus einem Tangentenviereck macht (eben hatten wir untersucht, was die Spiegelung an der Winkelhalbierenden aus einem Sehnenviereck macht).
Die Eigenschaft, Sehnenviereck zu sein bleibt bei dieser Operation natürlich erhalten. Das ist hier noch offensichtlicher als eben.

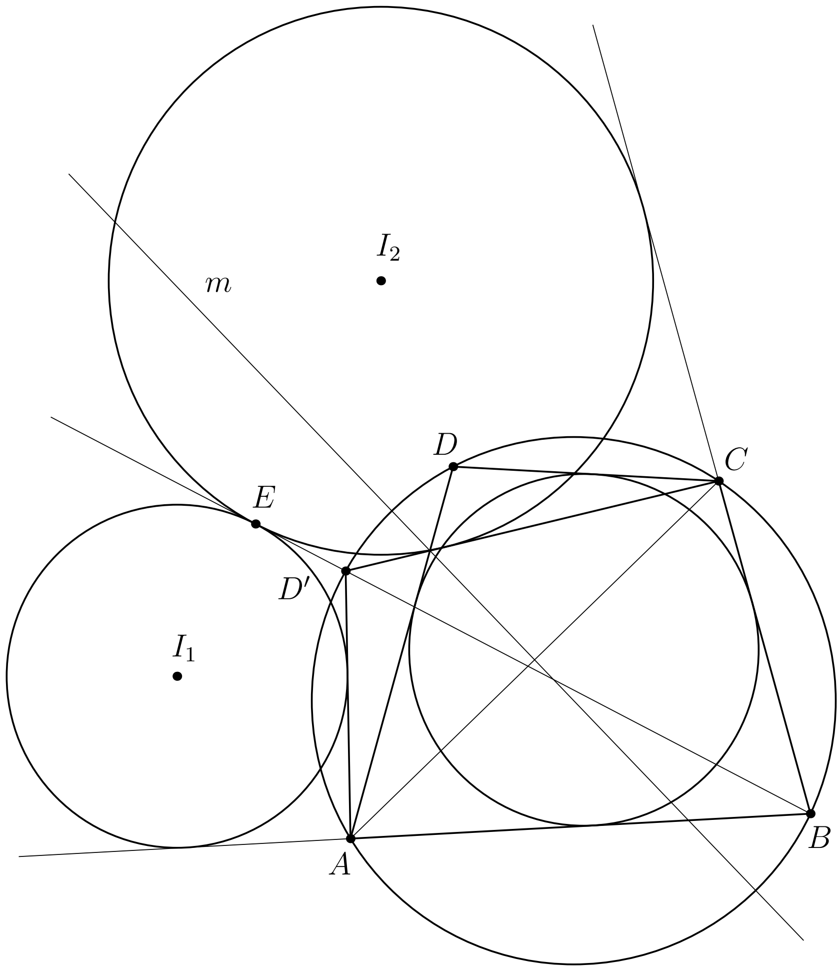


Aus einem Viereck, bei dem die Summe gegenüberliegender Seiten gleich groß ist, wird natürlich nach der Spiegelung ein Viereck, bei dem die Summe nebeneinanderliegender Seiten gleich groß ist (genau wie es beim Sehnenviereck mit den Winkeln war). Das ist ein Viereck, daß durch eine Diagonale – hier ist es $\overline{BD'}$ – in zwei Dreiecke mit gleichem (halbem) Umfang p geteilt wird. Für so ein Viereck gibt es noch keine spezielle Bezeichnung. Ihm entspricht im dualen Bild das Trapez.

4.2.8 Konstruktion eines Sehnentangentenvierecks aus einem Sehnenviereck

Ein Viereck, bei dem die Summe nebeneinanderliegender Seiten gleich groß ist, hat die besondere Eigenschaft, daß sich die beiden Ankreise, der durch die spezielle Diagonale gebildeten Dreiecke, in einem Punkt berühtn.
Die Konstruktion so eines Vierecks erfordert, zu einem gegeben Dreieck, in dessen Umkreis ein zweites Dreieck mit gleicher gemeinsamer Seite und gleichem Umfang zu konstruieren.
Das ist nicht so einfach, ist aber eine spezielle Konstruktionsaufgabe, die man unabhängig vom Problem des Sehnentangentenvierecks lösen kann.

- Gesucht: STV $\square ABCD$
- Gespiegelt an der Mittelsenkrechten m: $\square ABCD'$
- Gegeben: $\triangle ABD'$ mit Umkreis
- Gesucht: $\triangle BCD'$ mit gleichem Umkreis, gemeinsamer Seite $\overline{BD'}$ und gleichem Umfang.
- Aufgabe: Konstruktion eines Dreiecks aus R, c, p

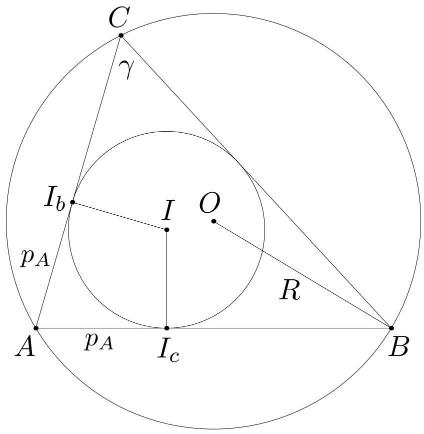


Zur Vorbereitung der Konstruktion eines Dreiecks mit gegebenen Umkreisradius, Seite und Umfang betrachten wir folgende

4.2.9 Hilfsaufgabe

Diese Aufgabe wurde im Programmheft gestellt und ist auch eine "Wurzel"aufgabe vom Februarheft 2012. Wir werden die Lösung hier erst nach der Veröffentlichung in der "Wurzel" (etwa Aug.-Sept. 2012) bekanntgeben.

Dreieck aus (R, γ, p_A)
Konstruiere ein Dreieck aus
1) Winkel γ am Eckpunkt C.
2) Umkreisradius R.
3) Abstand p_A zwischen Eckpunkt A und dem Punkt I_b, bei dem der Inkreis des Dreiecks die $\overline{AC}$ berührt.



4.2.10 Konstruktion eines Dreiecks aus R, c und p_a

4.2.11 Konstruktion eines Dreiecks aus R, c und p

Auch diese – sehr ähnliche Konstruktion – geben wir erst später bekannt.

4.2.12 Lösung von Aufgabe A