Konvexität und Ungleichungen

Tag der Mathematik 2003

Holger Stephan

Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

`http://www.wias-berlin.de/people/stephan`

$\Longrightarrow$ Für mathematisch interessierte Schüler

$\Longrightarrow$ Folien TdM2003

Fundamentale Ungleichungen

- **Ungleichung für Funktionen einer reellen Variablen**

$$\begin{array}{lr}
x^p - px + p - 1 \;\geq\; 0,\; p \geq 1 \textbf{ oder } p \leq 0 & x \geq 0,\; = \textbf{für } x = 1 \\
x^p - px + p - 1 \;\leq\; 0,\; 0 \leq p \leq 1 & x \geq 0,\; = \textbf{für } x = 1 \\
e^x \geq 1 + x & x \in \mathbb{R},\; = \textbf{für } x = 0 \\
x \ln x \;\geq\; x - 1 \;\geq\; \ln x & x > 0,\; = \textbf{für } x = 1 \\
x \geq \sin x & x \geq 0,\; = \textbf{für } x = 0
\end{array}$$

- **Ungleichungen zwischen Mitteln,** $x_i \geq 0$**, Gleichheit für** $x_i = x_j$**.**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\textbf{Max} & \geq & \textbf{QM} & \geq & \textbf{AM} & \geq & \textbf{GM} & \geq & \textbf{HM} & \geq & \textbf{Min} \\
\max(x_1, x_2) & \geq & \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} & \geq & \frac{x_1+x_2}{2} & \geq & \sqrt{x_1 x_2} & \geq & \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} & \geq & \min(x_1, x_2)
\end{array}$$

$$\max_{1\leq i\leq n}(x_i) \geq \sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}} \geq \max_{1\leq i\leq n}(x_i)$$

- **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung,** $x_i, y_i \geq 0$**, Gleichheit für** $x_i \sim y_i$

$$\Big(x_1^2 + ... + x_n^2\Big)\Big(y_1^2 + ... + y_n^2\Big) \geq \Big(x_1 y_1 + ... + x_n y_n\Big)^2$$

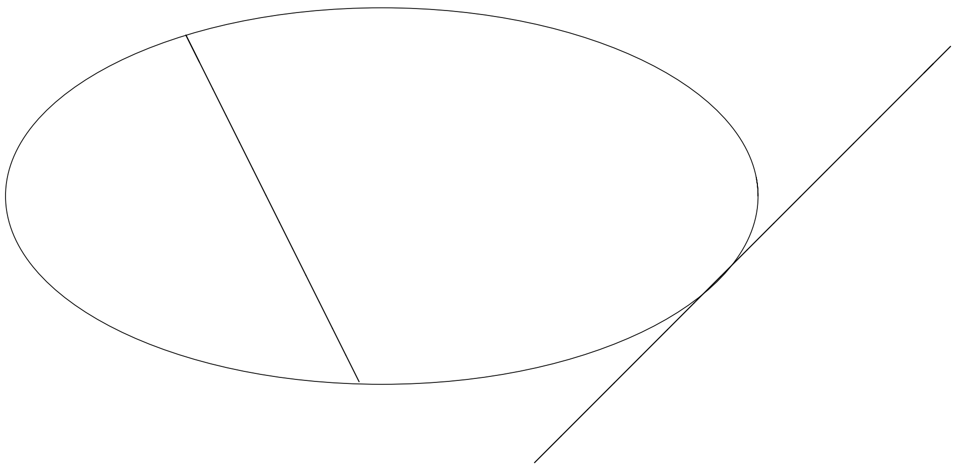
- **Höldersche Ungleichung,** $x_i, y_i \geq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$**, Gleichheit für** $x_i \sim y_i$**.**

$$\Big(x_1^p + ... + x_n^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(y_1^q + ... + y_n^q\Big)^{\frac{1}{q}} \geq x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

- **Minkowskische Ungleichung,** $x_i, y_i \geq 0$**,** $p > 1$ **Gleichheit für** $x_i \sim y_i$**.**

$$\Big(x_1^p + ... + x_n^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(y_1^p + ... + y_n^p\Big)^{\frac{1}{p}} \geq \Big((x_1 + y_1)^p + ... + (x_n + y_n)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Konvexität ebener Figuren

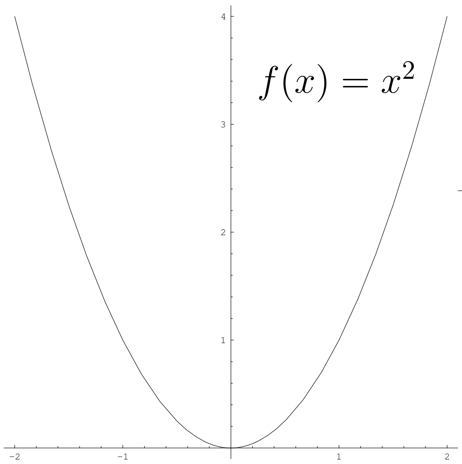


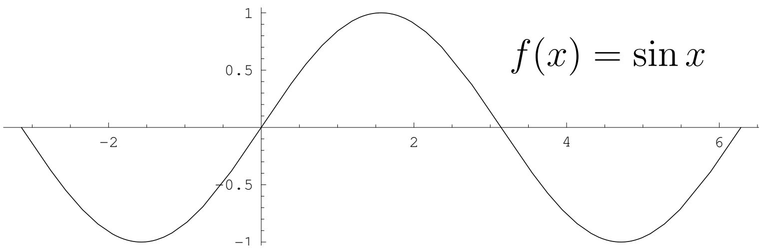
- **Tangenten liegen außen**
- **Krümmung nach außen**
- **Sehnen liegen innen**

Konvexität von Funktionen

Definition: $f(x)$ **heißt konvex auf** $[a,b]$**, wenn die Menge**

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y\geq f(x),\;\; x\in[a,b]\right\} \quad \textbf{konvex ist.}$$





konvex für $-\pi \leq x \leq 0$

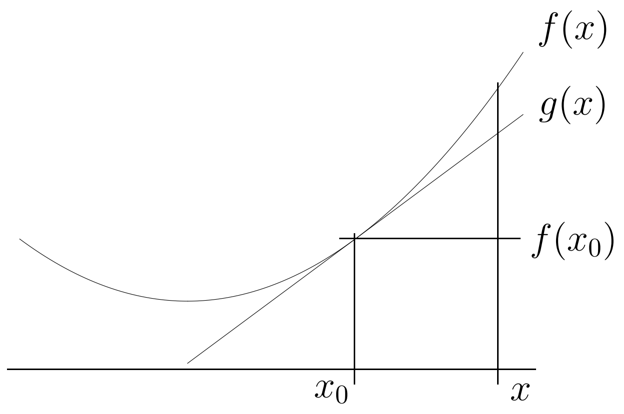
konkav für $0 \leq x \leq \pi$

konvex für $-\infty < x < \infty$

konkav = − konvex

- **Tangenten liegen außen** $\Longrightarrow$ **Tangenten liegen unter Funktion**
- **Krümmung nach außen** $\Longrightarrow$ **2. Ableitung positiv**
- **Sehnen liegen innen** $\Longrightarrow$ **Sehnen liegen über Funktion**

Tangenten liegen unter Funktionen



$$\begin{aligned} f(x) &\geq g(x) \\ f(x) &\geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

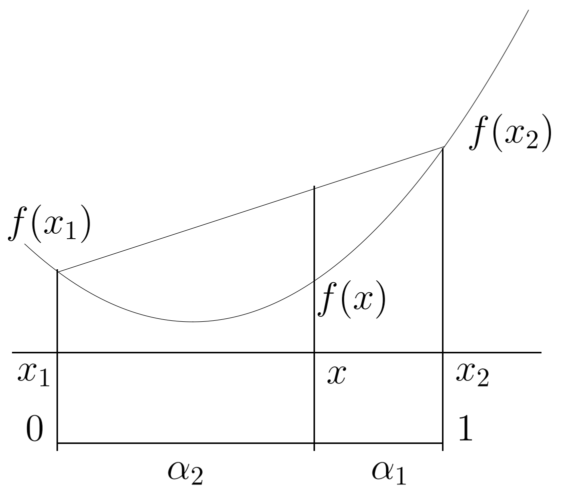
Gleichheit falls $x = x_0$ oder $f(x)$ ist linear.

2. Ableitung positiv

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\tilde{x}) \implies f''(x) \geq 0$$

$$f'(x) \ \text{ **monoton steigend** } \implies f''(x) \geq 0$$

Sehnen liegen über Funktion



$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= x \\ \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) &\geq f(x) \\ \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) &\geq f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \end{aligned}$$

Gleichheit falls $x_1 = x_2$ oder $f(x)$ ist linear.

konkav: aus $\geq$ wird $\leq$

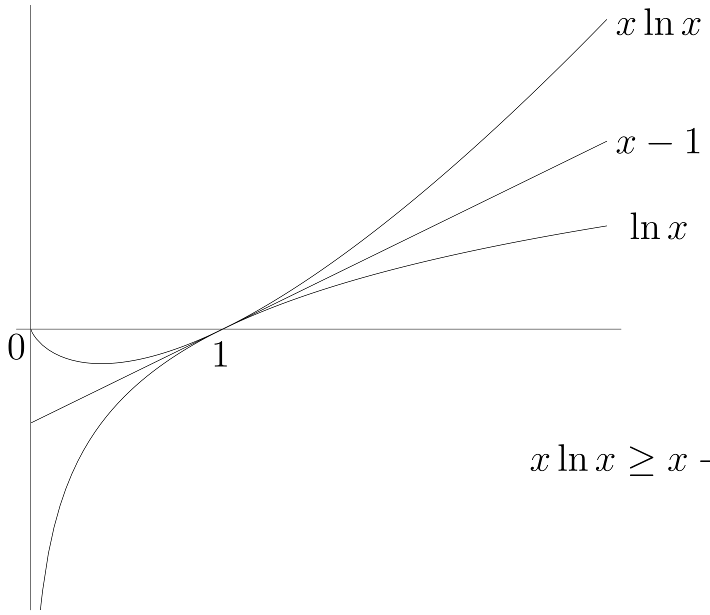
Beispiele konvexer Funktionen

- **Krümmung:** $f''(x) \geq 0$ **oder** $f'(x)$ **ist monoton steigend**
- **Tangenten:** $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- **Sehnen:** $\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \geq f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ **mit** $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

- $f(x) = x^p$, $f'(x) = px^{p-1}$, $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$
  $\Longrightarrow$ x^p **ist konvex für** $p \geq 1$ **oder** $p \leq 0$
  x^p **ist konkav für** $0 \leq p \leq 1$.
- $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, **konvex**
- $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, **konkav für** $x > 0$
- $f(x) = x \ln x$, $f'(x) = \ln x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$ **konvex für** $x > 0$
- $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$,
  Sinusfunktion ist dort konvex, wo sie negativ ist.

Tangente liegt unterhalb:

$$
\begin{array}{rcll}
f(x) & \geq & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) & \\
x^p & \geq & x_0^p + p x_0^{p-1}(x - x_0), & x_0 = 1 \Longrightarrow \quad x^p \geq 1 + px - p \\
-\ln x & \geq & -\ln x_0 - \frac{1}{x_0}(x - x_0), & x_0 = 1 \Longrightarrow \quad -\ln x \geq 1 - x \\
x \ln x & \geq & x_0 \ln x_0 + (\ln x_0 + 1)(x - x_0), & x_0 = 1 \Longrightarrow \quad x \ln x \geq x - 1
\end{array}
$$



$$x \ln x \geq x - 1 \geq \ln x$$

Die Jensensche Ungleichung

$f(x)$ **ist konvex, genau dann, wenn für** $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ **und** $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ **gilt**

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \geq f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Es sei $x_2 = \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3$ **mit** $\beta_1 + \beta_2 = 1$ **und** $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ **dann gilt**

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(\beta_2 y_2 + \beta_3 y_3) \geq f\Big(\alpha_1 x_1 + \alpha_2(\beta_2 y_2 + \beta_3 y_3)\Big)$$

Wegen

$$\beta_2 f(y_2) + \beta_3 f(y_3) \geq f(\beta_2 y_2 + \beta_3 y_3)$$

folgt

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 \beta_2 f(y_2) + \alpha_2 \beta_3 f(y_3) \geq f\Big(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \beta_2 y_2 + \alpha_2 \beta_3 y_3\Big)$$

Es gilt $\alpha_1, \alpha_2\beta_2, \alpha_2\beta_3 \geq 0$ **und** $\alpha_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 = 1$**.**

Es sei $f(x)$ **konvex,** $\alpha_i \geq 0$ **und** $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$**. dann gilt**

$$\boxed{\alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n)}$$

Zwei Beispielaufgaben

Beweise folgende Ungleichung über die drei Winkel im Dreieck:

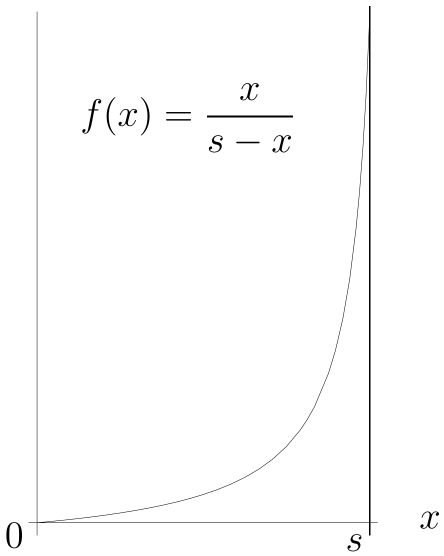
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Wann gilt Gleichheit?

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3) \leq f\big(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\big)$$

$$\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{3}\sin\beta + \frac{1}{3}\sin\gamma \leq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Gleichheit gilt nur im gleichseitigen Dreieck ($\alpha = \beta = \gamma$).



Es sei $s > 0$ und

$$f(x) = \frac{x}{s-x}$$

$f(x)$ ist für $x \in [0,s]$ konvex.
Also gilt für $a_i \in [0,s]$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_1} = \frac{1}{n}f(a_1) + ... + \frac{1}{n}f(a_n) \geq f\left(\frac{a_1 + ... + a_n}{n}\right) = f\left(\frac{s}{n}\right) =$$

$$= \frac{\frac{s}{n}}{s - \frac{s}{n}} = \frac{1}{n-1}$$

Beweis der Mittelungleichungen

Zu beweisen ist für $x_i > 0$

$$\max_{1\le i\le n}(x_i) \ge \sqrt{\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}} \ge \frac{x_1+...+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}} \ge \max_{1\le i\le n}(x_i)$$

$f(x) = x^p$ **ist für** $p \ge 1$ **und** $x \ge 0$ **konvex, also gilt mit** $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$

$$\begin{array}{rcl|l}
\alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_p) & \ge & f\Big(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\Big) & f(x) = x^p \\
\alpha_1 x_1^p + ... + \alpha_n x_n^p & \ge & \Big(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\Big)^p & x_i = y_i^k \\
\alpha_1 y_1^{pk} + ... + \alpha_n y_n^{pk} & \ge & \Big(\alpha_1 y_1^k + ... + \alpha_n y_n^k\Big)^p & p = \frac{m}{k},\ m \ge k \\
\alpha_1 y_1^{m} + ... + \alpha_n y_n^{m} & \ge & \Big(\alpha_1 y_1^k + ... + \alpha_n y_n^k\Big)^{\frac{m}{k}} & (...)^{\frac{1}{m}},\ m > 0 \\
\Big(\alpha_1 y_1^{m} + ... + \alpha_n y_n^{m}\Big)^{\frac{1}{m}} & \ge & \Big(\alpha_1 y_1^k + ... + \alpha_n y_n^k\Big)^{\frac{1}{k}} &
\end{array}$$

$$M_k(\alpha, y) = \Big(\alpha_1 y_1^k + ... + \alpha_n y_n^k\Big)^{\frac{1}{k}}$$

$$\begin{array}{rcl}
M_{-\infty}(\alpha, y) & = & \min(y_1, ..., y_n) \\
M_0(\alpha, y) & = & y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n} \\
M_\infty(\alpha, y) & = & \max(y_1, ..., y_n)
\end{array}$$

$$\boxed{M_m(\alpha, y) \ge M_k(\alpha, y),\ \infty \ge m \ge k \ge -\infty}$$

$$\alpha_1 = ... = \alpha_n = \frac{1}{n}$$

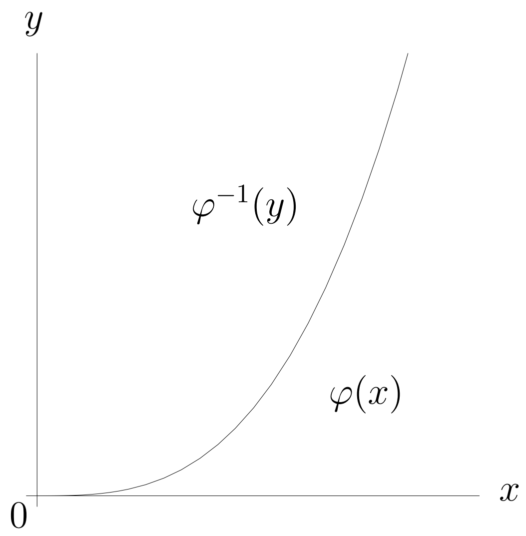
Max	$\ge$	**QM**	$\ge$	**AM**	$\ge$	**GM**	$\ge$	**HM**	$\ge$	**Min**
M_∞	$\ge$	M_2	$\ge$	M_1	$\ge$	M_0	$\ge$	M_{-1}	$\ge$	$M_{-\infty}$

Die Youngsche Ungleichung

$\varphi(x)$ **monoton wachsend**
$\varphi(0) = 0$

$y = \varphi(x) \iff x = \varphi^{-1}(y)$

$\varphi^{-1}(y)$ **monoton wachsend**
$\varphi^{-1}(0) = 0$



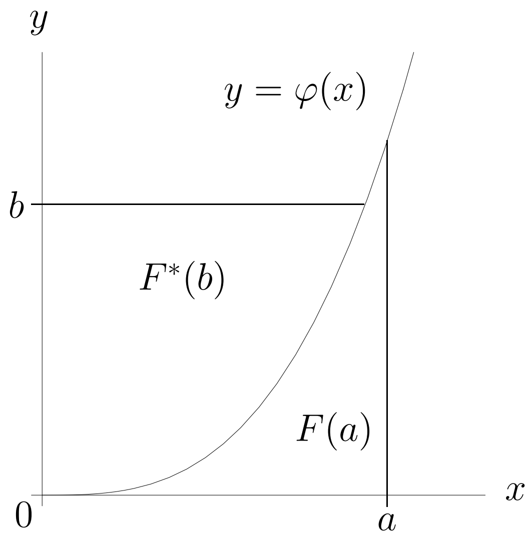
$$F(x) = \int_0^x \varphi(x')dx', \; F^*(y) = \int_0^y \varphi^{-1}(y')dy', \quad \textbf{sind konvex}$$

$$a \cdot b \le F(a) + F^*(b)$$

Gleichheit für $b = \varphi(a)$

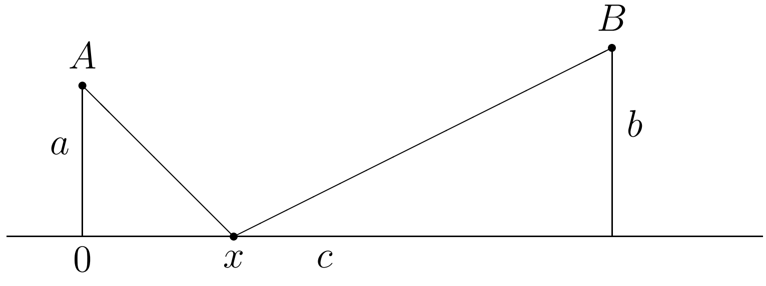
Beispiel: $\varphi(x) = x^{p-1}$**,** $p > 1$

$$a \cdot b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \;\textbf{für}\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$



Wie hole ich am schnellsten Wasser?

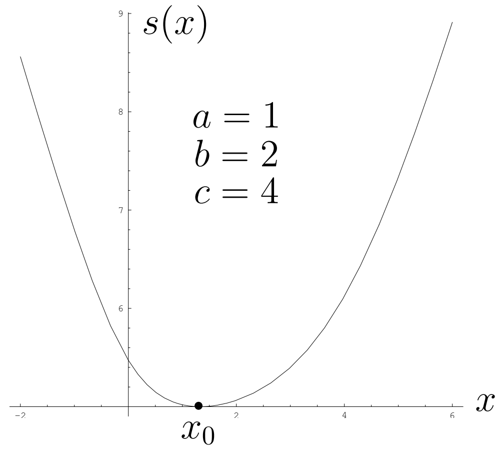
Aufgabe: Wie komme ich am schnellsten von A nach B, wenn ich noch einen (kleinen) Eimer Wasser aus dem Fluß nach B bringen soll? Welchen Punkt am Ufer muß ich von A aus ansteuern?



$$s(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$$

$$s'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = 0$$

$$x_0 = \frac{ac}{a+b}\ , \quad x_1 = \frac{ac}{a-b}\ .$$



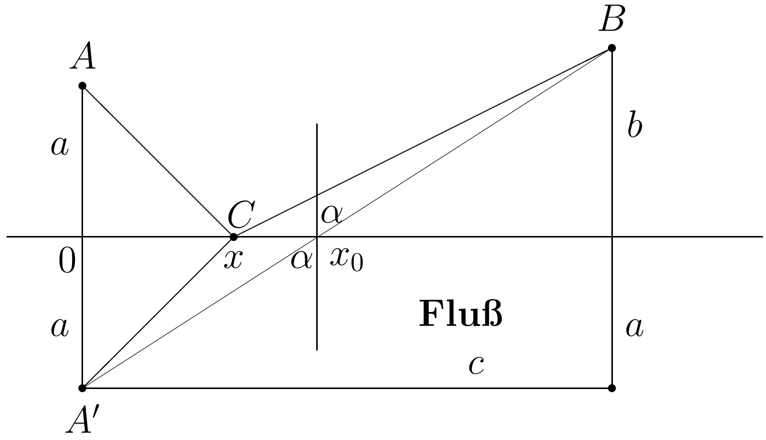
$$s(x) \geq s(x_0) = \sqrt{\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2 + a^2} + \sqrt{\left(c - \frac{ac}{a+b}\right)^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + (a+b)^2}$$

zu beweisen: $\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2} \geq \sqrt{c^2 + (a+b)^2}$

Beweis der Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\big((a+b)x-ac\big)^2 &\geq 0 \\
(a+b)^2x^2-2xac(a+b)+a^2c^2 &\geq 0 \\
(x^2+a^2)\Big((c-x)^2+b^2\Big) &\geq (ab+cx-x^2)^2 \\
\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{(c-x)^2+b^2} &\geq ab+cx-x^2 \\
2x^2-2cx+2\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{(c-x)^2+b^2} &\geq 2ab \qquad \Big| +a^2+b^2+c^2 \\
\Big(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2}\Big)^2 &\geq c^2+(a+b)^2 \\
\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2} &\geq \sqrt{c^2+(a+b)^2}
\end{aligned}
$$

Geometrische Lösung



$$s(x) = \overline{AC_x} + \overline{C_xB} = \overline{A'C_x} + \overline{C_xB} \geq \overline{A'B}$$

C_{x_0} **liegt auf** $\overline{A'B}$, **wegen Dreiecksungleichung im** $\triangle A'BC$

Strahlensatz: $\dfrac{x_0}{c} = \dfrac{a}{a+b} \implies x_0 = \dfrac{ac}{a+b}$

Gleiche Winkel: $\sphericalangle AC_{x_0} \uparrow \; = \; \sphericalangle \uparrow C_{x_0}B$

Dreiecksungleichung?
Definition: $L(\vec{XY})$ **sei die Länge des Vektors** $\vec{XY}$.
$L(\vec{XY})$ **sei konvex und homogen, d.h.** $L(c\ \vec{XY}) = c\,L(\vec{XY})$ **dann gilt (Jensensche Ungleichung)**

$$\frac{1}{2}L(\vec{A'C_x}) + \frac{1}{2}L(\vec{C_xB}) \geq L\left(\frac{1}{2}\vec{A'C_x} + \frac{1}{2}\vec{C_xB}\right) = \frac{1}{2}L(\vec{A'C_x} + \vec{C_xB}) = \frac{1}{2}L(\vec{A'B})$$

$\implies \quad L(\vec{A'C_x}) + L(\vec{C_xB}) \geq L(\vec{A'B})$ **Dreiecksungleichung!**

Das Fermatsche Prinzip

In einem Medium durchläuft ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten einen solchen Weg, daß die dazu nötige Zeit ein Minimum ist im Vergleich zu allen anderen die Punkte verbindenden Wege.

- **Reflexionsgesetz** $\min T(x)$
- **Brechungsgesetz** $\min T(x)$, $\min T(x,y)$, **...**
- **allgemeine Lichtbrechung (Variationsrechnung)** $\min T\big(f(x)\big)$

Allgemein: Ein physikalisches System verhält sich so, daß eine bestimmte Größe minimal wird:

$$W(x) \geq W(x_0)$$

Minimumproblem $\Longrightarrow$ Gleichungen, Differentialgleich.

$$\boxed{\textbf{Ursprung aller Naturgesetze ist Ungleichheit.}}$$