

GALILEIS FALLGESETZ UND ANDERE NATURGESETZE

Holger Stephan, Berlin*

Sommer 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Naturgesetze	2
1.1	Was sind Naturgesetze? Die übliche Sicht	2
1.2	Naturgesetze und mathematische Lehrsätze	3
1.3	Die Herleitung eines Naturgesetzes	4
2	Galileis Fallgesetz	5
2.1	Galileis Beweis	5
2.2	Die mathematische Formulierung	6
2.3	Die erste Kritikstufe	7
2.4	Extensive und intensive physikalische Größen	9
2.5	Die zweite Kritikstufe	10
3	Die dritte und letzte Kritikstufe	13
3.1	Newtons Gleichung	13
3.2	Der Galileische Grenzfall – keine Reibung	14
3.3	Der Aristotelessche Grenzfall – starke Reibung	14
3.4	Die exakte Lösung von Newtons Gleichung	14
3.5	Das Fallen gekoppelter Körper	15
4	Der Satz des Pythagoras	18
4.1	Der Mathematische Lehrsatz	18
4.2	Der Satz des Pythagoras in der Anwendung	18
4.3	Vom Theorem zum Naturgesetz	20
5	Schlußfolgerungen	20
5.1	Was sind Naturgesetze	20
5.2	Warum unterscheiden sich Galileis und Aristoteles Gedankengänge?	22
5.3	Die Galileische Revolution	23

*e-mail: stephan@wias-berlin.de URL: <http://www.wias-berlin.de/people/stephan>

1 Naturgesetze

1.1 Was sind Naturgesetze? Die übliche Sicht

Die Existenz von Naturgesetzen wird wohl von kaum jemandem bezweifelt. Schon daß es sie gibt bedeutet, daß sich die Natur *gesetzmäßig* verhält. Die Analogie zu Gesetzen, an die sich der Mensch halten soll ist hier durchaus treffend. Während der Mensch über eine Entscheidungsfreiheit verfügt und selbst entscheiden kann, ob er sich an ein Gesetz hält, was seine Möglichkeiten einschränkt, hat die Natur diese Freiheit nicht. Sie muß sich an die Naturgesetze halten.

Sieht man sich die vielfältigen Möglichkeiten der Natur an, scheint sie sich aus der Einschränkung ihrer Freiheit durch Naturgesetze nicht viel zu machen. Aber für den Menschen sind die Naturgesetze außerordentlich wichtig. Sie sagen ihm, wie sich die Natur unter bestimmten Bedingungen verhalten wird. Erst das macht jegliche Planung und Technik möglich.

Naturgesetze werden von Naturwissenschaftlern entdeckt. Dabei ist es Konsens, daß es die Natur dem Naturforscher nicht besonders leicht macht. Naturgesetze sind Geheimnisse, die der Natur abgerungen werden müssen.

Typische Beispiele für Naturgesetze sind das Hebelgesetz, das Fallgesetz (alle Körper fallen im Vakuum gleich schnell) der zweite Hauptsatz der Thermodynamik (die Entropie abgeschlossener Systeme steigt) oder Erhaltungssätze wie der Impuls-, Drehimpuls- oder Energieerhaltungssatz. Das sind alles Naturgesetze, über die es sich lohnt einmal tiefgründig nachzudenken. Das tun wir mit den Erhaltungssätzen im Essay [13]. Im vorliegenden Essay geht es vor allem um das Fallgesetz als Prototyp eines Naturgesetzes und Galileis Rolle in der Entwicklung der Wissenschaft.

Einig ist man sich auch in der Meinung, daß es sich bei Naturgesetzen um *objektive* Gesetzmäßigkeiten handelt. Das heißt um Gesetzmäßigkeiten, die unabhängig vom Menschen – im Gegensatz zum juristischen Gesetzeswerk – gelten. Naturgesetze sind Zusammenhänge von realen außerhalb und unabhängig von unserem Bewußtsein liegender Objekte. Hier ist zu bemerken, daß unter “objektiv” normalerweise verstanden wird, daß die Antwort der Natur objektiv ist und nicht etwa die Frage (zum Zusammenhang von Objektivität und Subjektivität siehe [14]).

Wenn wir uns für den Energieerhaltungssatz interessieren, fragen wir offensichtlich nach Eigenschaften der physikalischen Größe “Energie”. Die Größe haben wir uns ausgedacht und als interessierend festgelegt. Der Begriff “der physikalischen Größe Energie” existiert bestimmt nicht “außerhalb und unabhängig von unserem Bewußtsein”. Aber wie ist es mit der Energie an sich? Gibt es die überhaupt?

Warum stellt sich Galilei die Frage: “Was passiert eigentlich mit der Geschwindigkeit, wenn ein Körper fällt?”

Solche Fragen, Fragen nach dem Sinn und dem Ursprung der Frage selbst, ist üblicherweise nicht Gegenstand der Diskussion. Man ist sich einig, daß jeder vernünftige Mensch – und nicht nur ein solcher, auch vernunftbegabte Wesen irgendwo, wenn es sie geben sollte – diese Frage stellen würde.

Wir wollen hier aber genau diese Frage stellen: “Warum interessiert sich der Mensch für dieses oder jenes?” und “Wieviel Antwort ist in der Frage bereits enthalten?” Es wird sich herausstellen, daß häufig mit der Frage in gewissem Grad die Antwort bereits zwingend ist.

Stöbern wir mal ein bißchen in der wikipedia¹ nach Begriffen, die im Zusammenhang mit

¹Ich zitiere in diesem Text vermehrt die wikipedia, weil sie doch – zumindest in Mathematik und zu gewissem Maße auch Physik – einen common sense in der Wissenschaftlergemeinschaft darstellt, für alle schnell zugänglich

Naturgesetzen interessant sein könnten.

Unter dem Stichwort **Naturgesetz** lesen wir

Trotz ihrer Wichtigkeit, hat man interessanterweise noch keinen Konsens erreicht, was denn ein Naturgesetz eigentlich ist

Man grenzt sich ab zu **empirischen Formeln** [18]: *Eine empirische Formel ist eine mathematische Beziehung, die auf empirischem Wege, also mittels der Methode von Versuch und Irrtum, entdeckt bzw. aus experimentellen Daten als Näherungsformel aufgestellt wurde. Sie hatte folglich zum Zeitpunkt ihrer Entdeckung in der Regel keine theoretische Rechtfertigung, aus der man sie hätte deduktiv ableiten können.*

Und versucht sich, zu mathematischen Lehrsätzen (Theoremen) abzugrenzen aber: *Die Abgrenzung zwischen Naturgesetzen und anderen bestätigten oder formal hergeleiteten Theoremen ist nicht immer scharf. mathematische Lehrsätze.* [20]

Es fällt auf, daß man sich nicht besonders einig ist, wie man Naturgesetze, empirische Formeln und mathematische Lehrsätze (Theoreme) voneinander unterscheiden soll.

Die Abgrenzung zu vom Menschen geschaffenen Gesetzen, braucht hier nicht betont zu werden. Das ist das klassische Beispiel für den Unterschied von “objektiven” und “subjektiven” Gesetzen.

Man könnte denken, daß sich die Menschen mit der Zeit immer mehr Klarheit darüber verschaffen, was Naturgesetze sind. Das Gegenteil ist aber der Fall.

So schwammig und vorsichtig wie man sich heute mit dem Thema beschäftigt, war man in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhundert, als der Materialismus in voller Blüte stand, noch nicht. In Meyers Konversations-Lexikon von 1877 finden wir zwar nicht den Begriff *Naturgesetz* als eigenständiges Schlagwort, aber unter *Natur* finden wir alles, was das Herz begehrt. Dort lesen wir (siehe [26]):

Natur, *das Weltganze im Raum mit seinem gesetzmäßigen Veränderungen in der Zeit. Alle Veränderungen der Dinge sind entweder Bewegungen im Raum, oder sie sind von solchen abhängig. Alle Bewegungen lassen sich nach mechanischen Naturgesetzen erklären, welche auf einen mathematischen Ausdruck gebracht werden können. Natur ist also die Gesetzmäßigkeit im Dasein der Dinge im Gegensatz zur Willkür. Alles Künstliche, von Willkür des Menschen oder der Gottheit abhängig Gedachte ist der Natur gerade entgegengesetzt. ... Man spricht von der freien Natur im Gegensatz zu den durch Recht, Gesetzgebung, Verkehr und Willkür eingengten geselligen und bürgerlichen Verhältnissen. Man erholt sich vom Druck und Treiben des bürgerlichen Lebens in der freien Natur, weil jener Druck hier wegfällt, wo nur mathematische Naturgesetze, aber keine willkürlichen menschlichen Satzungen herrschen.*

Hier haben wir alles genau formuliert: Naturgesetze sind mechanische Gesetze und die folgen aus mathematischen Lehrsätzen. Sie lassen viel mehr Freiheit als das vom Menschen geschaffene Gesetzeswerk.

1.2 Naturgesetze und mathematische Lehrsätze

Naturgesetze im Zusammenhang mit mathematischen Lehrsätzen, wie etwa den Satz des Pythagoras, sollte man ein wenig tiefer beleuchten.

In der wikipedia lesen wir [20]: Der Satz des Pythagoras ist kein Naturgesetz, *sondern ein mathematischer Lehrsatz, der auf gewissen Grundaxiomen der Geometrie beruht.*

ist und man durch das gute Zitieren schnell zu den Meinungen anderer Wissenschaftler geführt wird, die ich mir hier spare zu zitieren.

(In der wikipedia steht anstelle des Satzes des Pythagoras der Satz *Die Winkelsumme im Dreieck in der Ebene beträgt 180 Grad*, was am Gedanken nichts ändert, aber für uns in diesem Essay ist Satz des Pythagoras wichtiger, weshalb der Autor ihn hier eingesetzt hat.)

Hier ist nicht ganz klar, was gemeint ist. Ist die Tatsache, daß der Satz des Pythagoras auf gewissen Grundaxiomen der Geometrie beruht der Grund dafür, daß er kein Naturgesetz ist? Darf ein Naturgesetz nicht auf gewissen Grundaxiomen beruhen? Das wird zumindest suggeriert.

Diese Abgrenzung zwischen Naturgesetzen und mathematischen Lehrsätzen ist eigentlich schade, denn aus erkenntnistheoretischer Sicht gibt es nichts besseres als einen mathematischen Lehrsatz. Er ist – einmal bewiesen – immer und überall absolut wahr. Keiner kommt auf die Idee zu überprüfen, ob denn der Satz des Pythagoras heute, nach 2000 Jahren, immer noch wahr ist oder ob neue Erkenntnisse ihn vielleicht relativieren.

Mathematische Lehrsätze sind auch objektiv. Jeder Mensch, der logisch denken kann, kommt exakt zum selben Ergebnis. Mehr noch, mathematische Lehrsätze kennen keine Autoritäten. Mit ein bißchen mathematischer Grundausbildung kann jeder Mensch einfache mathematische Sätze nachprüfen. Das gilt prinzipiell für *jeden* mathematischen Satz, nur daß die Vorbereitung, d.h. das Gewöhnen an die verwendeten Begriffe lange dauern kann und möglicherweise mühevoll ist. Seinen Kopf kann jeder Mensch überall verwenden. Es werden auch keine teuren Geräte gebraucht. Die Mathematik ist eine der billigsten Wissenschaften.

In der Physik müssen wir den Experimentalphysikern glauben, daß sie uns die richtigen Daten vorsetzen. Wir können sie nur schwer überprüfen. Manche Geräte wie der Large Hadron Collider am CERN sind 4 Milliarden von Euros teuer und haben einen Leistungsbedarf von 170 MW (siehe [21]). Eine handvoll Physiker hat dazu Zutritt, sie messen etwas, interpretieren die Daten und setzen uns dann eine Theorie (dunkle Materie, dunkle Energie, Urknall, Wärmetod, ...) vor die Nase, die unser Leben in seinen allertiefsten Grundlagen tangieren soll.

Bei Naturgesetzen – im Gegensatz zu mathematischen Lehrsätzen – können wir uns nie so richtig sicher sein. Sie hängen von Bedingungen ab, die sich ändern können. Damit sind sie nur “relativ” wahr, nur bis auf weiteres. Als Beispiel werden hier häufig die Newtonschen Gesetze genommen, die durch die Relativitätstheorie abgelöst wurden. Dabei hat diese Ablösung einerseits Unterschiede in den hintersten Kommastellen von Beobachtungswerten erklärt, was im allgemeinen nicht der Rede wert ist. Andererseits hat diese Ablösung uns ein völlig neues Weltbild beschert. Wir haben den Eindruck, daß wir die Welt jetzt viel besser und tiefgründiger verstehen.

Kann uns so etwas etwa beim Energieerhaltungssatz oder beim zweiten Hauptsatz der Thermodynamik passieren? Wohl kaum würden die meisten Naturwissenschaftler sagen. Warum eigentlich? Weil es “richtige Naturgesetze” sind. Sie sind genauso absolut und ewig wie mathematische Lehrsätze. Recht haben sie. Aber warum?

1.3 Die Herleitung eines Naturgesetzes

Was bedeutet es, ein Naturgesetz zu entdecken? Kann man es herleiten? Gibt es für ein Naturgesetz einen Beweis? Auch hier gehen die Meinungen – je nach herrschenden Ideologien in der Wissenschaft – weit auseinander.

Jahrzehntelang, in der Folge des Siegeszuges des Materialismus, galt die Meinung, daß Naturgesetze direkt aus den Beobachtungen abgeleitet werden. Man war der Meinung, daß jede Rolle, die dem Menschen im Prozeß der Naturerkenntnis zugesprochen wird, die Objektivität der Ergebnisse der Forschung schmälert.

Inzwischen hat sich die Poppersche Meinung weitgehend durchgesetzt, daß sich der Mensch

Theorien ausdenkt, die dann an den Beobachtungen falsifiziert werden. Welche Theorie gegenüber welcher den Vorzug erhält ist weitestgehend Geschmackssache oder hat wie Ernst Mach [8] meinte “ökonomische Gründe”. Aber das kann auch nicht der Wahrheit letzter Schluß sein. Es gibt genug Theorien, die etabliert sind und sich prinzipiell nicht falsifizieren lassen. Dabei muß man sich nicht unbedingt auf wacklige Gebiete wie Biologie, Geschichte, Psychologie oder Soziologie wagen. Auch in der Physik ist das der Fall. Soll doch mal einer kommen und sich trauen den Energieerhaltungssatz zu falsifizieren. Schon der Versuch ist strafbar (siehe [13]).

Es wird Zeit, daß der Herkunft der Naturgesetze mal auf den Grund gegangen wird.

2 Galileis Fallgesetz

Aristoteles war der Meinung, daß schwerere Körper schneller fallen als leichte. Er schreibt: *Doppelt so schwere Körper fallen doppelt so schnell*. In diesem Abschnitt geht es Aristoteles darum, zu zeigen, daß ein Vakuum unmöglich ist. Es heißt, daß Galilei entdeckte, daß alle Körper gleich schnell fallen. Das wird gemeinhin mit dem Begriff “Fallgesetz” bezeichnet. Meistens wird präzisiert: Im Vakuum fallen alle Körper gleich schnell. Galilei hat also Aristoteles widerlegt. In seinen “Discorsi” [1] macht sich Galilei über Aristoteles fast lustig: Er hätte nur mal ein Experiment machen sollen, daß hätte ihm sofort gezeigt, daß er falsch liegt.

Viele kennen auch die Anekdote dazu, daß Galilei vom schiefen Turm von Pisa verschiedene Kugeln herunterfallen ließ und sie gleichzeitig unten ankamen. Viele sind der Meinung, daß diese Fallexperimente das Fallgesetz beweisen. Ob diese Anekdote der Wahrheit entspricht, ist dem Autor nicht bekannt. Aber sie paßt ausgezeichnet. Galilei hat das Fallgesetz entdeckt. Er hat in Pisa gelebt. In Pisa gibt es einen weltbekannten schiefen Turm, an dem man hervorragend Fallexperimente durchführen könnte. Eine ideale Mischung für eine Anekdote.

Dabei hat Galileis Beweis nichts mit Experimenten zu tun. Das faszinierende ist, daß Galileis Beweis rein logischer Natur ist. Menschen, die der Meinung sind, daß physikalische Gesetze aus Beobachtungen gewonnen werden, sollten hier schon mal stutzig werden. Wie kann man ein Naturgesetz logisch beweisen? Und wenn das möglich ist, was hat das für Konsequenzen – für die Natur.

Wir wollen im weiteren Galileis Beweis diskutieren und der Frage nachgehen, was Galileis Beweis eigentlich beweist. Das ist sicher wichtig, wenn man bedenkt, daß Galileis Arbeiten und insbesondere sein Beweis des Fallgesetzes als Geburtsstunde der modernen Physik und überhaupt Naturwissenschaften zählen.

Damit keine Mißverständnisse entstehen: Der Autor hat nicht die Absicht, diese Bedeutung von Galilei irgendwie zu schmälern. Galileis Gedankengänge sind stets außerordentlich scharfsinnig. Es geht dem Autor darum, die Konsequenzen aufzuzeigen, die ein oberflächliches Verständnis von Galileis Arbeiten in der Denkweise der nachfolgenden Naturwissenschaftler bis zum heutigen Tage nach sich zieht.

Bei der Gelegenheit läßt es sich aber nicht vermeiden, Aristoteles und seine Arbeiten wieder in ein etwas besseres Licht zu rücken.

2.1 Galileis Beweis

Der Autor empfiehlt, die Passagen in Galileis Werk [1] unbedingt zu lesen. Dort wird das Ergebnis in einem Dialog zwischen drei Personen herausgearbeitet. Wir wollen diese, sich über

mehrerer Seiten hinziehenden, Passagen hier nicht zitieren, sondern uns anschauen, wie Karl Popper diesen Meilenstein in der Wissenschaft formuliert hat. Popper (siehe [5]) faßt den eigentlichen Sinn von Galileis Beweis kurz zusammen. Bei dieser Gelegenheit haben wir auch die Möglichkeit Popper – den heutigen Guru der Wissenschaftstheorie – in die Diskussion mit einzubeziehen.

Eines der wichtigsten Gedankenexperimente in der Geschichte der Naturphilosophie und zugleich einer der einfachsten und genialsten Gedankengänge, den die Geschichte des rationalen Nachdenkens über unser Universum kennt, ist in der Kritik Galileis an der aristotelischen Theorie der Bewegung enthalten. Galilei widerlegt damit die Annahme des Aristoteles, dass die natürliche Geschwindigkeit eines schweren Körpers größer ist als die eines leichteren. Wenn wir zwei bewegte Körper annehmen, argumentiert Galileis Sprecher, deren natürliche Geschwindigkeiten ungleich sind, dann gilt offensichtlich: wenn wir sie zusammenbinden, den langsamen und den schnelleren, dann wird der letztere durch den langsameren etwas verzögert und der langsamere durch den schnelleren etwas beschleunigt werden. Nimmt man daher an, ein großer Stein bewege sich beispielsweise mit einer Geschwindigkeit von acht Schritten und ein kleinerer mit einer Geschwindigkeit von vier, dann wird nach ihrer Verbindung die Geschwindigkeit des zusammengesetzten Systems weniger als acht Schritte sein. Aber die zwei Steine bilden verbunden einen größeren Stein, als der erste war, der sich mit einer Geschwindigkeit von acht Schritten bewegte. Daher wird sich der zusammengesetzte Körper (obwohl er schwerer ist als der erste Körper alleine) dennoch langsamer bewegen als der erste allein, was deiner Annahme widerspricht. Und da dies die aristotelische Annahme ist, die der Ausgangspunkt der Überlegung war, ist diese Annahme nunmehr widerlegt: es wurde gezeigt, dass sie absurd ist. Ich sehe in Galileis Gedankenexperiment ein Musterbeispiel für den besten Gebrauch, den man von Gedankenexperimenten machen kann.

Abgesehen von Galileis Beweis selbst sind in diesem Zitat auch alle Superlative enthalten, die man gemeinhin mit ihm verbindet. Popper gibt sich wirklich alle Mühe und spart nicht mit Worten, uns das klarzumachen: Gedankenexperiment, genial (Galilei), (nicht weniger als) unser Universum, absurd (Aristoteles), ...

2.2 Die mathematische Formulierung

Was bei Galilei und bei Popper in Worten gefaßt ist, läßt sich streng mathematisch formulieren. Der Beweis ist dann ein indirekter, d.h., es wird gezeigt, daß die Annahme aller Voraussetzungen zu einem Widerspruch führt.

Wir betrachten einen fallenden Körper. Uns interessiert, wie sich seine Geschwindigkeit v und seine Masse M zueinander verhalten, wie die Geschwindigkeit von der Masse abhängt. Wir nennen diesen Zusammenhang $v(M)$, die Geschwindigkeit des fallenden Körpers in Abhängigkeit von seiner Masse. Hier könnte man sich schon mal fragen, um welche Geschwindigkeit es sich handelt, ist die denn konstant beim Fallen? Wenn nicht, geht es um die Endgeschwindigkeit, oder um die Fallzeit? Diese sinnvollen Fragen hat sich Galilei aber nicht gestellt, und das tun wir deshalb vorläufig auch nicht. Für zwei Körper mit den Massen M_1 und M_2 (ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $M_1 < M_2$ an). und ihre Vereinigung M_{12} betrachten wir entsprechend $v(M_1)$, $v(M_2)$ und $v(M_{12})$. Nun haben wir folgende Aussagen:

- Behauptung (B): $M_1 < M_2 \implies v(M_1) < v(M_2)$

Das ist Aristoteles Behauptung: Schwerere Körper fallen schneller.

- Voraussetzung 1 (V1): $M_{12} = M_1 + M_2 > M_2$

Die Masse der verbundenen Körper ist größer als die Masse jedes einzelnen Körpers.

- Voraussetzung 2 (V2): $v(M_1) < v(M_{12}) < v(M_2)$

Die Geschwindigkeit der verbundenen Körper liegt zwischen den Geschwindigkeiten der einzelnen Körper.

Hieraus können wir zwei Aussagen schlußfolgern:

- Aussage 1 (folgt aus B und V1): $v(M_{12}) > v(M_2)$
- Aussage 2 (folgt aus B und V2): $v(M_{12}) < v(M_2)$

Offensichtlich widersprechen sich die beiden Aussagen, woraus man schließen kann, daß eine der Voraussetzungen B, V1 oder V2 falsch sein muß. Die Aussagen V1 und V2 sind wahr, weil sie das Verhalten von Massen und Geschwindigkeiten beim Zusammenlegen beschreiben. Gegen Voraussetzung V1 gibt es sicher keine Einwände, die Additivität der Masse ist uns völlig geläufig. Voraussetzung V2 ist vielleicht weniger offensichtlich. Manch einer denkt vielleicht, daß sich Geschwindigkeiten ebenfalls addieren. Das ist unter anderen Umständen tatsächlich möglich. Hier aber nicht. Man kann sich die Mittelung der Geschwindigkeiten z.B. bei aneinandergeschlossenen Fahrzeugen vorstellen. Dieses Problem wird in [15] genauer diskutiert. Folglich muß Voraussetzung B, Aristoteles' Behauptung, falsch sein.

Es sei hier angemerkt, daß der Beweis auch direkt erfolgen kann, was vielleicht strenger und intuitiver ist. Tatsächlich kann man streng mathematisch folgendes beweisen:

Aus $M_{12} = M_1 + M_2 > \max\{M_1, M_2\}$ und $v(M_1) < v(M_{12}) < v(M_2)$ oder $v(M_2) < v(M_{12}) < v(M_1)$ folgt $v(M_1) = v(M_2)$ für beliebige Massen M_1 und M_2 . Man muß nur zusätzlich voraussetzen, daß der funktionelle Zusammenhang $v(M)$ stetig in M ist, was eine natürliche Annahme ist, um überhaupt von einem funktionellen Zusammenhang zwischen realen Größen sprechen zu können.

Wir lassen den Beweis hier weg, erwähnen aber, daß er genauso vollzogen werden kann, wie der Beweis, daß unter den stetigen (es reicht sogar lokale Beschränktheit) Funktionen nur die lineare Funktion $f(x) = ax$ die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ erfüllt.

Die erste Bekanntschaft des Autors mit diesem Beweis ähnelte in etwa der Meinung von Karl Popper: Was für ein scharfsinniger Gedankengang! Denkt man etwas tiefer und noch tiefer und noch tiefer über Galileis Beweis nach, erkennt man, den großen Trugschluß, dem man hier aufsitzt. Ein Trugschluß, der eigentlich offensichtlich ist, den aber scheinbar kaum einer – auch Popper nicht – erkannt hat. Der Beweis ist richtig, aber der Schluß auf den realen Sachverhalt ist falsch. Das ist übrigens nicht der einzige Punkt, in dem Popper zu kurz gedacht hat.

2.3 Die erste Kritikstufe

Als erstes könnte man Galilei – analog zu seinem Vorwurf an Aristoteles – empfehlen doch mal aus dem Fenster zu schauen, und sein Naturgesetz an der harten Realität zu messen. Was da auffällt ist, daß alle Körper *verschieden* schnell fallen. Und man könnte sicher auch doppelt so schwere Körper konstruieren, die doppelt so schnell fallen.

Wie kann man erklären, daß z.B. im Herbst die Blätter vom Baum langsam vor sich hin fallen, wogegen sie wie ein Stein zu Boden fallen würden, wenn sie zusammengeklebt wären. Sie haben

jetzt einen geringeren Luftwiderstand, sind aber auch viel schwerer. Warum mittelt in diesem Fall das Koppeln nicht die Geschwindigkeit?

Müssen wir in dieser Zwiespältigkeit leben? Einerseits sehen wir, daß jeder Körper fällt wie er will und andererseits wissen wir, daß “in Wirklichkeit” alle Körper gleich schnell fallen.

Nun könnte man Hegel zitieren, der auf die Frage: “Was aber, wenn die Tatsachen der Theorie widersprechen?”, gesagt haben soll: “Umso schlimmer für die Tatsachen.” Übrigens ein Spruch, der nur auf den ersten Blick absurd anmutet.

Aber so einfach wollen wir es uns nicht machen. Daß die Dinge entgegen Galileis Gesetz verschieden schnell fallen, ist natürlich seit Galilei auch schon anderen Physikern aufgefallen. Der Einwand wird gleich weggewischt mit der Bemerkung, daß das Gesetz nur im Vakuum stimmt. Und tatsächlich, im Vakuum wurde es in unzähligen Experimenten bestätigt (siehe [24]). Popper würde sagen: Es gelang noch nicht, dieses Gesetz zu falsifizieren. Aber das interessiert uns hier nicht. Wir zweifeln ja nicht das Gesetz selbst an, sondern wollen nur seine Herleitung kritisch betrachten.

In Galileis Herleitung kommt das Wort Vakuum überhaupt nicht vor. Es wurde hergeleitet ohne diese zusätzliche Voraussetzung. Im Vakuum ist die Herleitung tatsächlich korrekt, aber warum? Das besprechen wir etwas später.

Popper nennt den Gedanken von Aristoteles, daß leichte Körper langsamer fallen als schwerere “absurd”. Man hätte vorsichtig formulieren können: “... scheint so allgemein nicht zu gelten.” Aber absurd ist schon ein hartes Wort und beleidigt auch die Natur, die ohne Mühe überall leichte Körper langsamer fallen läßt als schwerere.

Ironischerweise hat Galilei in den “Discorsi” kurz nach der “Widerlegung” von Aristoteles den freien Fall im Wasser betrachtet und davon gesprochen, daß die Körper verschieden schnell fallen. Dabei hat er nicht gemerkt, daß sein Gegenargument im Wasser genauso gilt. Worin sich der Körper bewegt spielt bei Galilei überhaupt keine Rolle.

Wo liegt denn nun der Fehler? Lesern, die einen versteckten Trugschluß in der Logik vermuten, sei versichert, daß die Logik völlig in Ordnung ist. Auch die Logik an sich ist nicht das Problem. An die müssen wir uns schon halten um überhaupt Schlüsse ziehen zu können (mehr hierzu siehe das Essay [16]).

Galilei (übrigens genauer Benedetti, der das Argument vor Galilei anführte²) bewies, daß alle Körper gleich schnell fallen *müssen*. Die Natur hat gar keine andere Wahl. Sie muß sich an die Logik halten. Sie muß die Objekte – zumindest im Vakuum, wo das Gesetz gilt – gleich schnell fallen lassen, ob sie will oder nicht. Die Frage ist hier, wie hängen logische Schlüsse mit Naturgesetzen zusammen. Kann man sich – als Natur – über ein Naturgesetz hinwegsetzen, über einen logischen Schluß aber nicht?

Für die Leser, die mit einem Willen in der Natur nichts anfangen können, aber vielleicht einem allmächtigen Gott einen Willen zusprechen, sei an ein Jahrhunderte altes Paradoxon erinnert, das sogenannte Allmachtsparadoxon.

Seit dem Mittelalter werden logische “Beweise” gegen die Allmacht Gottes gesucht – und gefunden. So ein Beweis war etwa: “Gott kann keine so hohe Mauer bauen, über die er selbst nicht springen kann.” Das ist vielleicht ein schlechtes Beispiel, weil aus heutiger Sicht nicht klar ist, ob Gott überhaupt Beine hat und springen kann. Heute würden wir vielleicht besser auf den Punkt bringen und formulieren: “Gott kann die Zahl 19 nicht in Primfaktoren zerlegen.”

² Benedetti (* 14. August 1530 in Venedig; † 20. Januar 1590 in Turin) widerlegte hierbei die falsche Hypothese von Aristoteles, nach der ein Körper umso schneller fallen muss je schwerer er ist, mit einem einfachen Gedankenexperiment: Werden zwei fallende Kugeln mit einer (masselosen) Stange verbunden, ändert sich nichts an der Fallgeschwindigkeit, obwohl die Masse des Gesamtkörpers sich vergrößert (siehe [19]).

Man würde meinen, daß Gott sich schon mal über ein Naturgesetz hinwegsetzen könnte, man könnte ihm z.B. Zauberei zutrauen, sogar das vorübergehende Anhalten der Sonne (siehe [2]). Aber unlogisch handeln, das kann er nicht!

Es muß also einen Unterschied zwischen einem Naturgesetz und einem logischen Schluß geben. Wenn das so ist, dann ist mit Galileis logischem Schluß offenbar noch nicht viel gewonnen.

Denken wir noch einmal über die (unmögliche) Primfaktorzerlegung von 19 nach. Nehmen wir mal an, Gott könnte das. Und nun? Na wir würden das Ergebnis gerne wissen, d.h. die beiden Faktoren genannt bekommen. Aber das geht eben nicht, wir könnten ihn durch Nachrechnen sofort der Lüge überführen.

Indem wir Primzahlen betrachten, haben wir beschlossen, Zahlen zu betrachten, die sich nicht in Faktoren zerlegen lassen. Das war unsere Entscheidung. Wir haben uns einen Zwang auferlegt und erwarten jetzt von Gott, daß er uns von diesem Zwang befreit (mehr hierzu siehe das Essay [16]).

Was ist an diesen Überlegungen so wichtig? Wir dürfen nicht unsere menschengemachten Einschränkungen als Einschränkungen der Natur verstehen. Übertragen auf das Fallgesetz würde die Natur auf Galileis Verbot antworten: Schön, was ihr Menschen für scharfsinnige Schlüsse ziehen könnt, aber ich laß nach wie vor die Dinge fallen wie ich will.

2.4 Extensive und intensive physikalische Größen

Fundamental für das Verständnis des weiteren und auch der Voraussetzungen V1 und V2 ist das Konzept der extensiven und intensiven physikalischen Größen. Dieses Konzept ist ausführlich in [15] besprochen. Wir erwähnen hier nur kurz die prinzipiellen Zusammenhänge dazu.

Es kann der Eindruck herrschen, daß sich Naturwissenschaftler eigentlich für alle denkbaren Größen interessieren und ihnen Zahlen zuordnen, mit denen man dann beliebig rechnen kann. Das ist aber ein großer Irrtum. So interessiert sich keiner etwa für die Wurzel aus der Länge einer Strecke oder die Summe zweier Telefonnummern.

Warum ist das so? Der Grund besteht darin, daß die biologische Organisation der menschlichen Sinnesorgane und die Denkweise des Menschen, das Augenmerk des Menschen auf ganz bestimmte Größen lenkt.

Betrachten wir ein reales Objekt. An ihm interessieren uns ganz bestimmte Attribute wie Temperatur, Helligkeit, Kraft, Geschwindigkeit, Mischungsverhältnis, ... sowie Volumen, Masse, Impuls, Energie, Ladung, Anzahlen, Länge³. Diese, absichtlich in zwei Gruppen geteilten Größen haben ein völlig verschiedenes Verhalten, wenn man mehrere Objekte zusammenbringt und einen geeigneten Kontakt herstellt. Die ersten Größen mitteln sich, die zweiten Größen addieren sich.

Betrachten wir z.B. zwei Flüssigkeiten (etwa zwei verschieden prozentige Alkohol-Wasser-Gemische) mit verschiedenen Temperaturen. Beim Mischen (in Kontakt bringen) beider Flüssigkeiten mitteln sich die Mischungsverhältnisse und Temperaturen, wogegen sich die Volumina und Massen addieren. Besonders auffällig ist das bei der Temperatur. Sie mittelt sich stets. Es ist noch kein Experiment gefunden worden, in dem sich die Temperaturen zweier in Kontakt gebrachter Körper *addiert* hätten. Das ist eine Form der Aussage des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Fahren wir eine Strecke, die aus verschiedenen Abschnitten besteht, die mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchfahren werden und interessieren wir uns für die Gesamtstrecke, so

³Das gilt nur auf den ersten Blick, tatsächlich muß man bei räumlichen Größen wie Länge und Flächeninhalt etwas vorsichtiger sein.

müssen wir dafür die Teilstrecken und die Teilzeiten addieren, die Geschwindigkeit aber geeignet mitteln.

Koppeln wir einen langsamen Körper an einen schnelleren mit einer unelastischen Schnur, so mitteln sich die Geschwindigkeiten, wogegen sich die Massen und Impulse addieren.

Wir können alle physikalischen (und nicht nur solche, auch ökonomische wie Preise und Umsätze) in zwei Typen unterteilen, solche, die sich bei Kontakt addieren und solche, die sich bei Kontakt mitteln. Erstere heißen *extensive Größen* (Volumen, Masse, Impuls, Energie, Ladung, Anzahlen, Länge) Letztere heißen *intensive Größen* (Temperatur, Helligkeit, Kraft, Geschwindigkeit, Mischungsverhältnis). Diese Begriffe hat Immanuel Kant 1781 in der „Kritik der reinen Vernunft“ eingeführt. Für das Verständnis dieses Essays sind die beiden Eigenschaften – *mittelnd* und *addierend* – ausreichend, obwohl es weitere fundamentale Eigenschaften gibt, die mit der Art des Weltverständnisses des Menschen zu tun haben.

Der Mensch kann nur intensive Größen beobachten und vergleichen, dagegen kann er extensive Größen durch Abzählen von Normgrößen *messen*. Abzählen ist ein *zeitlicher* Prozeß. Dafür ist entscheidend, daß sich die Größen im Meßprozeß nicht verändern, sie müssen also *Erhaltungsgroßen* sein. Intensive Größen dagegen kann man nicht direkt messen, auch wenn häufig der Eindruck suggeriert wird. Wir können eine Temperatur von 20° nicht messen, indem wir 20 Körper mit der Normtemperatur 1° zusammenbringen. Intensive Größen erhalten ihren Zahlenwert durch *Berechnung*, genauer durch Division zweier gemessener extensiver Größen (z.B. die Geschwindigkeit als Länge geteilt durch das Zeitintervall).

Alle interessierenden physikalischen Größen kann man letztlich zu einem dieser beiden Typen zuordnen. Das hat weitreichende Folgen. Interessieren wir uns nämlich für eine Größe, etwa die Masse oder die Geschwindigkeit, dann haben wir – weitgehend unbewußt – ihr Verhalten bereits festgelegt. Interessieren wir uns für die Masse, dann muß sie sich addieren (Voraussetzung V1). Interessieren wir uns für die Geschwindigkeit (Voraussetzung V2), dann muß sie sich mitteln. Diese Voraussetzung schränken die Möglichkeiten der Größen, sich willkürlich zu verhalten, stark ein.

Dabei ist zu beachten, daß es nicht die Natur ist, die die Masse addieren läßt, sondern daß wir es sind, die sich für die Masse interessieren, weil wir sie – Dank ihrer Additivität – messen können. Würden wir uns aus irgendeinem Grund für das Quadrat der Masse interessieren, so würde es sich nicht additiv verhalten und die mathematischen Eigenschaften der Größe wären ganz andere.

Der prinzipielle gedankliche Fehler, der in diesem Zusammenhang gemacht wird, ist der, anzunehmen, daß etwa die Masse eine Größe ist, die zu den realen Objekten an sich gehört. Tatsächlich gehört sie nur zu ihnen, weil der Mensch ihnen diese Größe als Attribut zuschreibt. Und das tut er aus gutem Grund, nämlich weil er sie messen kann.

Bei vom Menschen geschaffenen Objekten ist diese Künstlichkeit der Größen offensichtlich. So wird keiner auf die Idee kommen, daß zu einem Baum, den man im Gartenmarkt kaufen kann, der Preis eine Größe ist, die zum Baum als solchem dazugehört.

2.5 Die zweite Kritikstufe

Der augenblickliche Zustand ist unbefriedigend. Galilei hat logisch recht, die Dinge *müssen* gleich schnell fallen, sein Argument beeindruckt die Natur aber nicht. Sie läßt die Dinge fallen wie sie will. Wir müssen das Problem also tiefer untersuchen, insbesondere, was der logische Schluß überhaupt für eine Wahrheit ans Licht gebracht hat.

Wofür interessiert sich Galilei? Er fragt, wie sich Masse und Geschwindigkeit eines fallenden

Körpers verhalten. Er fragt nicht, ob vielleicht das Produkt aus Temperatur und Farbe konstant ist. Wer hat ihm nahegelegt, sich für das eine und nicht für das andere zu interessieren? Das war er selber und zwar aus gutem Grund. Er wußte, was er von der Masse und der Geschwindigkeit eines Körpers zu halten hat und was diese Größen für eine Rolle bei der Bewegung spielen. Er wußte aber vor allem, daß die Geschwindigkeit eine intensive Größe ist, die sich beim Zusammenlegen zweier Körper mittelt (Voraussetzung 2) und daß die Masse eine extensive Größe ist, die sich beim Zusammenlegen zweier Körper addiert (Voraussetzung 1). Hieraus folgert er rein logisch, daß die Geschwindigkeit konstant sein muß.

Das Fallgesetz und die Frage nach dem Verhalten der Geschwindigkeit ist dasselbe, logisch ist es eine Tautologie. Da der Begriff Tautologie aber den Beigeschmack "offensichtlich, besonders einfach" hat, wollen wir den Begriff Äquivalenz dafür verwenden.

Galileis Beweis bedeutet: In dem Augenblick, in dem ich mich für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Masse interessiere, muß diese Abhängigkeit konstant sein (d.h., die Geschwindigkeit hängt nicht von der Masse ab). Das ist nicht offensichtlich, man muß dazu ein paar Schlüsse ziehen, was aber an der Äquivalenz nichts ändert. Im Beweis, daß es sich um eine Äquivalenz handelt, liegt gerade Galileis Verdienst.

Man fragt sich doch aber bei Galileis Herleitung, warum er nicht von der Auftreffgeschwindigkeit spricht, warum er z.B. nicht die Geschwindigkeit zu gleichen Zeitpunkten betrachtet, warum er nicht eine Bewegungsgleichung löst oder sonst irgendwelche strengeren physikalischen Überlegungen vornimmt. Warum gibt es bei Galilei überhaupt keine materialabhängigen Voraussetzungen? Warum funktioniert der Gedankengang im Wasser genauso, wo die Folgerung dort doch offensichtlich falsch ist.

Übrigens wußte Galilei bereits, daß die Geschwindigkeit beim Fallen linear wächst. D.h., die Geschwindigkeit nicht einmal eines fallenden Körpers ist konstant. Was kann man da schon über zwei fallende Körper aussagen.

Galilei beschreibt überhaupt nicht den freien Fall, er beschreibt nicht einmal eine allgemeine Bewegung. Er beschreibt nur, was passiert, wenn bewegte zwei Körper in Kontakt gebracht werden. Er beschreibt, daß sich die Geschwindigkeiten mitteln und daß deshalb diese Geschwindigkeiten nicht von einer additiven Größe wie der Masse abhängen können. Aber die Mittelungseigenschaft steckt im Begriff "Geschwindigkeit" bereits drin (siehe [15]). Wenn wir nach der Geschwindigkeit fragen, fragen wir nach einer Größe mit ganz speziellen Eigenschaften. Würde Galileis Argument stichhaltig sein, könnte man es auf beliebige Körper anwenden. Wie wäre es hiermit: Behauptung: Autos mit mehr Leistung fahren schneller. Widerlegung: Angenommen, das wäre so. Wir hängen das langsamere an das schnellere und erhalten ein gekoppeltes Auto mit einer mittleren Geschwindigkeit aber einer noch größeren Leistung (Leistung ist additiv). Fazit: Alle Autos fahren gleich schnell.

Nun beschreibt Galilei aber kein reales physikalisches Experiment sondern ein Gedankenexperiment. Aus einem realen physikalischen Experiment könnte man noch den Schluß ziehen, daß das Ergebnis vielleicht nur etwas über den Experimentierzeitpunkt aussagt. Kurze Zeit später könnte die Welt schon wieder ganz anders aussehen. Überhaupt, stellt man beim Planen eines realen Experimentes schnell fest, was man zur Durchführung eigentlich noch alles wissen und beachten müßte und – das alles nicht so simpel ist. Aber ein Gedankenexperiment kann man – nicht so wie ein reales Experiment – überall und zu jeder Zeit durchführen. Damit wird suggeriert, daß das Argument immer und unter allen Bedingungen gilt. Das ist ja gerade das faszinierende daran. Tatsächlich kann man die meisten Gedankenexperimente (in der Relativitätstheorie wimmelt es nur so davon) niemals und nirgendwo real durchführen. Die Annahme in seinem Gedankengang (bei Popper): *Wenn wir zwei bewegte Körper annehmen, ..., deren*

natürliche Geschwindigkeiten ungleich sind ..., ist ja nie real zu testen, denn Galilei beweist ja, daß alle Körper gleich schnell fallen.

Ein Gedankenexperiment beschreibt das Verhalten mathematischer Objekte, für die man Begriffe von realen Objekten eingesetzt hat. Man überträgt Sachverhalte aus der geistigen Welt auf die physische Welt. Aber in beiden Welten wirken völlig verschiedene Gesetze (siehe [14]).

Einerseits möchte man – man ist ja Materialist – natürlich nicht in den Verdacht geraten, nicht von der Realität auszugehen, andererseits nimmt man an, daß ein Gedankenexperiment als Begründung eines Naturgesetzes völlig ausreichend ist.

Galilei hat also nur einen mathematischen Lehrsatz “ $v(M)$ ist konstant” hergeleitet aus der Kenntnis heraus, daß v intensiv und M extensiv ist. Wie kommt man nun von diesem mathematischen Lehrsatz zum Naturgesetz “alle Körper fallen gleich schnell”? Man muß nur noch eine reale Situation entwerfen, in der man den mathematischen Lehrsatz anwenden kann, d.h. eine Situation, in der die Geschwindigkeit nur von der Masse also nicht von der Farbe, Temperatur oder irgendwelchen äußeren Einflüssen abhängt. Und da bietet sich das Vakuum an. Und siehe da, das Experiment läuft nicht fehl. Übrigens kannte Galilei noch kein reales Vakuum. Man stritt sich immer noch, ob es so etwas überhaupt geben kann. Viele waren sich sicher, daß es keine Leere gibt, Gott würde Leere nicht zulassen.

Um uns der Behauptung, es handelt sich um eine Äquivalenz, auch von der anderen Seite zu nähern, können wir überlegen, was man denn sonst noch aus Galileis Gedankengang schließen kann.

Es geht bei ihm überhaupt nicht um Bewegung. Daher auch der fehlende physikalische Hintergrund. Galilei hat einfach einen Zusammenhang von extensiven (sich bei Kontakt addierenden) und intensiven (sich bei Kontakt mittelnden) physikalischen Größen deutlich gemacht. Immer da, wo ich nach der Abhängigkeit $i(E)$ einer intensiven Größe i von einer extensiven Größe E suche, gilt, daß $i(E)$ konstant sein muß. Damit könnte man sofort einen Sack voller neuer “Naturgesetze” aus dem Hut zaubern. Wie wäre es mit: “Alle Körper haben Montags früh um Sieben dieselbe Temperatur, unabhängig von ihrer Ladung.” Dieser Satz läßt sich exakt so wie bei Galilei beweisen. Die Ladung ist eine additive Größe, die Temperatur mittelt sich. Nehmen wir mal an, Körper mit größerer Ladung haben eine höhere Temperatur. Wir bringen zwei Körper, einen kalten mit kleiner Ladung und einen warmen mit hoher Ladung in Kontakt. Die Temperatur gleicht sich auf eine mittlere Temperatur an, die Ladung addiert sich. Dieser neue Körper sollte aber eine höhere Temperatur haben. Widerspruch! Also muß die Temperatur konstant sein. Die Zeitangabe spielt wie bei Galilei nur insofern eine Rolle, daß man die Körper zur selben Zeit in Kontakt bringen muß. Man kann an einen schweren Stein, den man heute fallen läßt, keinen leichten Stein koppeln, der gestern vom Turm fiel.

Dieses “Naturgesetz” ist natürlich Unsinn. Aber worin besteht der Unterschied zwischen diesem offensichtlichen Unsinn und dem sicher sinnvollen Fallgesetz? Beim Fallgesetz ist es gelungen experimentelle Bedingungen zu schaffen bei denen es gilt. Das hat mit der Herleitung kaum etwas zu tun. Gelingt es, experimentelle Bedingungen zu schaffen, in denen die Temperatur eines Körpers tatsächlich nur von seiner Ladung abhängt (wird vermutlich schwer), dann gilt das eben formulierte Naturgesetz. Erst diese kreative Leistung macht aus einer logischen Äquivalenz ein Naturgesetz.

3 Die dritte und letzte Kritikstufe

Nachdem wir uns überzeugt haben, daß Galileis Gedankengang nicht weiter hilft, wenn man sich tatsächlich für das Fallen von Körpern interessiert, kann man natürlich nach anderen Methoden suchen. Wir können versuchen, das Problem der fallenden Körper mathematisch exakt zu lösen. So, wie es vielleicht Newton oder Leibniz gemacht hätten. Das ist möglich und wir wollen das jetzt tun. Anschließend, mit Kenntnis des exakten Fallverhaltens, können wir noch einmal auf die Gedankengänge von Galileis und Aristoteles zurückkommen.

3.1 Newtons Gleichung

Das exakte Fallverhalten kann man einfach mit Newtons Gleichung berechnen. Newtons Gleichung (Kraft ist Masse mal Beschleunigung) hat sich als ausgesprochen erfolgreich herausgestellt – falls man alle Größen in der Gleichung (insbesondere die Kraft!) und die Anfangsbedingungen kennt, kann man Ort und Geschwindigkeit für alle zukünftigen Zeiten berechnen.

Die Kraft sollte einerseits so einfach wie möglich sein, damit wir eine explizite Lösung der Gleichung erhalten. Andererseits sollte sie unser Problem zumindest prinzipiell beschreiben. Diese beiden Wünsche unter einen Hut zu bringen ist im allgemeinen hoffnungslos. Unser Fall ist einer der seltenen Fälle, wo das möglich ist.

Wir betrachten dazu alles in einem Koordinatensystem, in dem der Körper vom Nullpunkt nach unten fällt. Das ist die intuitiv sinnvolle Darstellung. Allerdings bedeutet das, daß die Ortskoordinate negativ ist und daß die Geschwindigkeitskoordinate als Zeitableitung der Ortskoordinate, wenn der Körper sich nach unten bewegt ebenfalls negativ ist. Das macht das Verständnis der Formeln etwas schwierig. Ein schneller (d.h. mit einer vom Betrage her großen Geschwindigkeit, etwa 10 m/s) fliegender Körper hat deshalb eine kleinere Geschwindigkeit – nämlich -10 m/s – als ein langsamerer, z.B. mit 5 m/s fallender Körper, der eine Geschwindigkeit von -5 m/s hat. Es ist $-5 > -10$ aber $5 < 10$.

Wenn ein Körper schneller (Betrag der Geschwindigkeit) nach unten fällt, ist deshalb auch seine Beschleunigung negativ.

Wir nehmen an, daß auf unseren fallenden Körper eine Gewichtskraft F_g und eine Reibungskraft F_r wirkt. Die Gewichtskraft wirkt nach unten, beschleunigt den Körper, was seine negative Geschwindigkeit verkleinert. Das ergibt ein negatives Vorzeichen in der Gleichung. Es ist $F_g = Mg$, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Der Anteil dieser Kraft in der Newtonschen Gleichung ist also $-Mg$.

Für die Reibungskraft nehmen wir das einfachste Modell an, eine Kraft, die der Bewegung entgegenwirkt und proportional zur Geschwindigkeit ist, also $F_r = -av(t)$. Diese Kraft bremst den Körper. Das ist richtig, egal welches Vorzeichen die Geschwindigkeit hat. Ihr Betrag wird kleiner. Die lineare Abhängigkeit der Reibungskraft von der Geschwindigkeit ist keine prinzipielle Einschränkung. Qualitativ verhalten sich die Lösungen für viele verschiedene Reibungsterme ähnlich.

Zusammen ergibt das folgende Newtonsche Gleichung

$$M\dot{v}(t) = F_r + F_g = -av(t) - gM .$$

Der Punkt über $v(t)$ bedeutet hier wie in der Physik üblich, die Zeitableitung. $\dot{v}(t)$ ist also die Beschleunigung.

Bevor wir die Gleichung exakt lösen, betrachten wir die beiden Grenzfälle.

3.2 Der Galileische Grenzfall – keine Reibung

Galilei hat den Fall ohne Reibungskraft betrachtet, also $a = 0$, was zu $M\dot{v}(t) = -gM$ führt. Hier kann man die Masse kürzen, was auf $\dot{v}(t) = -g$ führt, auf eine Gleichung in der tatsächlich die Masse nicht mehr vorkommt. Die Lösung ist für einen anfangs ruhenden Körper $v(t) = -gt$. Die Geschwindigkeit verhält sich linear (der Körper wird schneller) und hängt nicht von der Masse ab.

Das wäre eine weitere Herleitung des Fallgesetzes. Hier wurde nur Newtons Gleichung vorausgesetzt die aber – im Gegensatz zu Galileis Gedankenexperiment – tatsächlich die Bewegung eines Objektes beschreibt.

Bei dieser Gelegenheit sollte man doch einen näheren Blick auf die beiden M rechts und links in der Gleichung vor dem Kürzen werfen. Das ist nämlich keinesfalls “dieselbe” Masse. M auf der linken Seite ist die träge Masse, die beschreibt, was für eine Kraft, die Trägheitskraft, der Bewegung entgegen gesetzt wird. M auf der rechten Seite ist die schwere Masse, die die Gewichtskraft erzeugt, also so etwas wie die Ladung des Gravitationsfeldes. Daß beide Massen gleich sind wird stets angenommen aber einen tieferen Grund hierfür kennt man bis heute noch nicht. Im Experiment hat sich hier noch keine nennenswerte Abweichung gezeigt.

3.3 Der Aristotelesche Grenzfall – starke Reibung

Aristoteles hat – im Gegensatz zu Galilei – die Reibungskraft als prinzipiell gesehen. Sein Prinzip war: Körper kommen, allein gelassen, zur Ruhe. Galilei dagegen betrachtete die Reibung als störend (da hat er recht) und vernachlässigbar (das werden wir sehen). Galileis Prinzip lautet: Körper bleiben in gradlinig gleichförmiger Bewegung, solange keine Kraft auf sie wirkt. Warum beide Wissenschaftler die Welt so unterschiedlich gesehen haben, wird noch zu untersuchen sein. Hier wollen wir berechnen, wohin die Aristotelesche Sicht führt.

Man kann gut beobachten, daß Körper beim Fallen in der Luft (noch besser im Wasser) nach einer kurzen Beschleunigungsphase eine konstante Geschwindigkeit erreichen. Das sieht man besonders an leichten Körpern wie bei Schneeflocken oder Blättern, die vom Baum fallen. Gut bekannt ist es auch bei Körpern mit sehr hohem Luftwiderstand, wie etwa beim Fallschirm. Vermutlich hat Aristoteles genau diese Endgeschwindigkeit fallender Körper im Blick gehabt, als er von einer typischen Geschwindigkeit fallender Körper gesprochen hat.

Für Newtons Gleichung bedeutet das, daß der Trägheitsterm auf der linken Seite verschwindet. Konstante Geschwindigkeit bedeutet keine Beschleunigung: $M\dot{v}(t) = 0$. Das führt auf die Gleichung $0 = -av_\infty - gM$ (hier sei v_∞ die Endgeschwindigkeit), woraus man diese konstante Endgeschwindigkeit sofort ablesen kann: $v_\infty = -(g/a)M$. Sie ist negativ, weil die Körper nach unten fallen und – proportional zur Masse, genau wie Aristoteles behauptet hat. Wenn das a für zwei Körper dasselbe ist, das ist in guter Näherung für Körper gleicher Form der Fall, dann sind die Endgeschwindigkeiten dieser Körper proportional zu ihrer Masse.

3.4 Die exakte Lösung von Newtons Gleichung

Wir lösen jetzt Newtons Gleichung

$$M\dot{v}(t) = -av(t) - gM$$

mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ (ruhender Körper) und erhalten

$$v(t) = -\frac{g}{a}M \left(1 - e^{-\frac{a}{M}t}\right)$$

(die Geschwindigkeit ist negativ, weil der Körper nach unten fällt).

Für große Zeiten nähert sich $v(t)$ dem Aristotelesschen Wert $-\frac{g}{a}M$ an. Diese Endgeschwindigkeit wird um so schneller erreicht, je schneller $e^{-\frac{a}{M}t}$ schnell gegen 0 geht. Das ist der Fall, je größer $\frac{a}{M}$ ist, d.h. je größer die Reibung a und je kleiner die Masse M ist. Wenn also Galilei am schiefen Turm von Pisa tatsächlich Fallexperimente gemacht hätte, hätte er mit kleinen, gleichgroßen Kugeln aus verschiedenen Materialien, etwa Holz, Eisen, Kupfer und Gold, Aristoteles Behauptung experimentell *bestätigen* können.

Das Messen der Geschwindigkeit von Objekten im Fluge war zu Galileis Zeiten zugegebenermaßen nicht leicht. Aber Auftreffzeitpunkte von verschiedenen Objekten hätte man vergleichen können. Man hätte also experimentell bestätigen können, daß ein kurze Zeit später losgeschickter schwererer Körper einen leichteren im Fluge einholt. Das ist heute noch so und hätte auch Galilei zu denken geben müssen.

Für kleine Zeiten, also $t \rightarrow 0$ erhalten wir mit der Taylorreihe eine Approximation:

$$v(t) \sim -\frac{g}{a}M \left(\frac{a}{M}t - \frac{a^2}{2M^2}t^2 + \dots \right) = - \left(gt - g\frac{a}{2M}t^2 + \dots \right)$$

Der erste Wert ist gerade der Galileische Wert $-gt$. Für kurze Zeiten fallen die beiden Körper also gleich schnell. Die "Kurzzeit" in der die Körper gleich schnell fallen wird umso länger, je kleiner a , also die Reibung, ist. Für spätere Zeiten ist die Geschwindigkeit des schwereren Körpers größer, bei gleichem a .

3.5 Das Fallen gekoppelter Körper

Galileis Gedankenexperiment gilt natürlich auch bei Reibung. Um zu sehen, wie sich denn die reale Kopplung zweier fallender Körper auswirkt, wollen wir uns als letztes ansehen, wie der Fall von zwei Körpern mit selbem a verläuft, die unterwegs aneinandergekoppelt werden. Dabei können wir genau verfolgen, was denn eigentlich passiert. Das ist nicht so einfach zu berechnen. Wir liefern hier nur das Ergebnis.

Wir nehmen an, daß zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ein leichter Körper mit Masse M_1 fallen gelassen wird. Zum Zeitpunkt $t_1 > t_0$ wird an der selben Stelle ein zweiter Körper mit der Masse $M_2 > M_1$ auf die Reise geschickt. Er holt den ersten zu einem Zeitpunkt $t_2 > t_1$ ein. Daß dieses Ereignis mit Sicherheit eintritt, wissen wir bereits. Zu diesem Zeitpunkt sollen sich beide Körper zu einem Körper verbinden. Real kann man das erreichen, indem wir an einen Körper ein Stück Knete heften, an der der andere kleben bleibt. Physikalisch handelt es sich um einen plastischen Stoß, bei dem der Impuls aber nicht die Energie erhalten bleibt. Die Zeitspanne dieses Stoßes betrachten wir als unbedeutend.

Von diesem Zeitpunkt an fliegen beide Körper zusammen, können also als ein Körper mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit betrachtet werden. Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, daß beide Körper vor dem plastischen Stoß und der Körper danach dasselbe a , also denselben Luftwiderstand haben. Das ist annähernd der Fall, wenn beide Körper dieselbe Form haben und nach dem Stoß im Flug "hintereinander" kleben. Man kann sich gut Situationen vorstellen, in denen das nicht der Fall ist. Die sollen uns hier aber nicht interessieren.

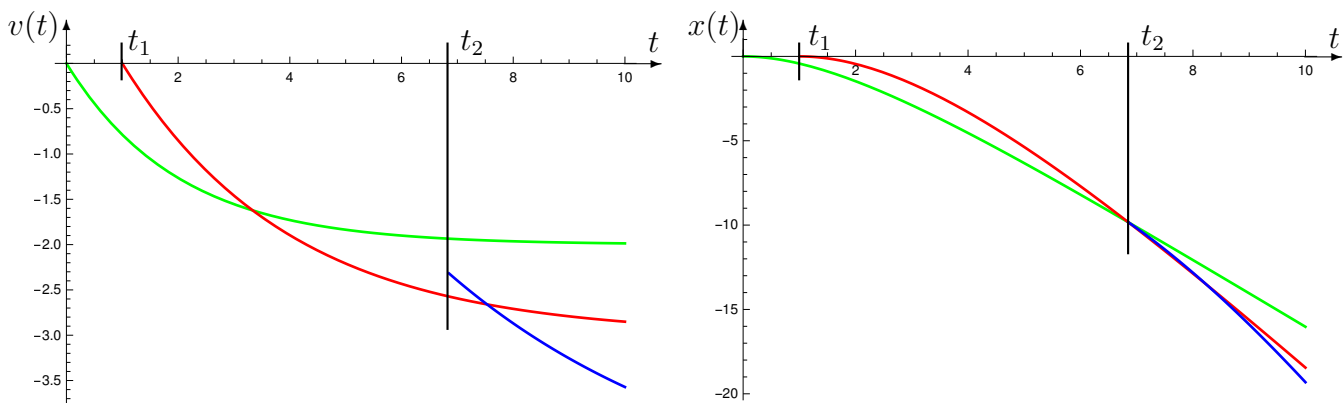
Den zurückgelegten Weg erhalten wir, wie bekannt, aus dem Zeitintegral über die Geschwindigkeit. Für einen einzigen Körper erhalten wir (der Anfangspunkt sei der 0-Punkt)

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = - \int_0^t \frac{g}{a}M \left(1 - e^{-\frac{a}{M}t'} \right) dt' = -\frac{gM}{a}t + -\frac{gM^2}{a^2} \left(1 - e^{-\frac{a}{M}t} \right)$$

Die Körper fallen nach unten, deshalb sind Geschwindigkeiten und Wege negativ.

Was im Detail passiert, zeigen die folgenden Kurven. Die Kurven zeigen links die Geschwindigkeiten und rechts die Ortskoordinaten in Abhängigkeit von der Zeit t . Die grüne bzw. die rote Kurve zeigt das Fallverhalten eines **leichten Körpers**, der zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bzw. eines **schweren Körpers**, der zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ fallen gelassen wird. Es sind die realen Kurven des Fallens mit Luftwiderstand. Man sieht, daß beide Körper eine vom Betrage her maximale Geschwindigkeit erreichen würden. Beide Kurven gehen in eine Asymptotik über. Dabei ist die Geschwindigkeit des **schweren Körpers** am Ende größer als die des **leichteren Körpers**.

Da der **leichte Körper** bereits fällt, wenn der **schwere Körper** losgelassen wird, also anfangs schneller ist, schneiden sich beide Kurven, etwa bei $t = 3.5$, wenn die Geschwindigkeiten gleich sind. Dieser Schnittpunkt im linken Geschwindigkeitsbild interessiert uns aber nicht. Uns interessiert der Schnittpunkt der Kurven im rechten Orts-Bild.



Irgendwann (zum Zeitpunkt $t_2 = 6.85$) holt der **schwere** (weil schnellere) Körper den **langsameren** ein. Das ist der Schnittpunkt der Ortskurven im rechten Bild. Wir nehmen an, daß in diesem Augenblick beide Körper einen plastischen Stoß vollführen, sie bleiben aneinander kleben und bilden einen **noch schwereren (blauen) Körper** mit der Masse $M_{12} = M_1 + M_2$ und fallen ab jetzt mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit. Die entsprechenden Kurven sind **blau**. Die Geschwindigkeit des **blauen Körpers** läßt sich exakt berechnen. Das wußte Galilei vermutlich noch nicht. Er hat nur zu recht angenommen, daß sie zwischen den beiden Kurven liegt. Im Geschwindigkeitsbild links sieht man, daß die blaue Kurve zwischen der roten und der grünen – zumindest zum Zeitpunkt t_2 und kurz darauf – liegt. Nach dem Impulserhaltungssatz gilt für die gemeinsame Geschwindigkeit $v_{12}(t_2)$

$$v_{12}(t_2)M_{12} = v_1(t_2)M_1 + v_2(t_2)M_2$$

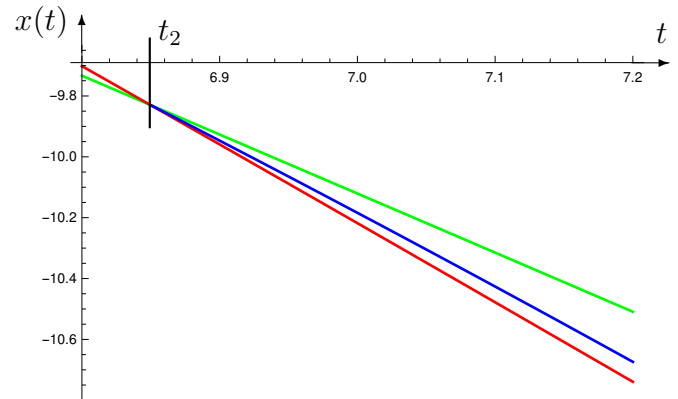
also

$$v_{12}(t_2) = \frac{v_1(t_2)M_1 + v_2(t_2)M_2}{M_1 + M_2}$$

Sie ist das nach den Massen gewichtete Mittel der beiden ursprünglichen Geschwindigkeiten. Bei der Zeichnung der Bilder wurde ein Massenverhältnis $M_1 : M_2 = 2 : 3$ angenommen. Die blaue Kurve startet deshalb bei $t = t_2$ nicht ganz in der Mitte zwischen der roten und der grünen Kurve. (Die rote und grüne Kurve geben ab diesem Zeitpunkt nur an, wie die beiden Körper fielen, wenn sie ohne Zusammenstoß aneinander vorbei flögen.)

Zu beachten ist, daß sich nur die Anfangsgeschwindigkeit $v_{12}(t_2)$ so berechnen läßt. Das weitere Verhalten des Körpers wird von Newtons Gleichung mit dieser Anfangsgeschwindigkeit beschrieben. Und da die Masse sehr groß ist, erhöht sich die Geschwindigkeit schnell und schneidet auch die rote Kurve.

Im rechten Bild ist der Ausschnitt zum Zeitpunkt des plastischen Stoßes noch mal vergrößert. In der Tat, der **sehr schwere Körper** fliegt zwischen dem **leichten** und dem **schweren Körper**. Würde sich dieses Verhalten fortsetzen, müßten alle Kurven tatsächlich zusammenfallen, wie es im Vakuum der Fall ist. Hier schneidet die **blaue Kurve** aber doch die **rote** wie auf dem obigen Bild gut zu erkennen ist. Der **blaue Körper** fliegt schneller!



Was können wir hieraus für Schlüsse ziehen?

Wir haben exakt den Moment in Galileis Gedankengang: Wir haben einen schweren, schnellen Körper und einen leichten, langsamen Körper. Wir koppeln beide zusammen. Galileis Strick bewirkt einen plastischen Zug, der schnellere Körper zieht den langsameren hinter sich her. Unsere Knete bewirkt einen plastischen Stoß, was physikalisch im Prinzip dasselbe ist. Der schnellere Körper schiebt den langsameren vor sich her. Der neue Körper bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit weiter. Jetzt kommt Galileis Schluß: Das darf er aber nicht, denn er ist ja schwerer. Der Körper lacht und sagt: Mach ich aber doch! Ich bewege mich jetzt mit einer mittleren Geschwindigkeit, obwohl ich so schwer bin.

Nicht nur das, nach Galilei wäre so ein Experiment gar nicht real ausführbar. Schon die Möglichkeit, daß wir verschieden schnelle Körper koppeln, ist bei Galilei nur eine gedachte, denn das führt ja sofort zum Widerspruch.

In der Realität bleibt die mittlere Geschwindigkeit nicht lange erhalten. Der blaue Körper beschleunigt sich, bis er seine – das heißt die seiner Masse entsprechende – noch größere Endgeschwindigkeit erreicht hat. Genau wie Aristoteles meint.

Galileis Argument ist nur anwendbar, wenn sich jeder Körper immer nur mit genau einer Geschwindigkeit bewegen kann. Im allgemeinen hängt die Geschwindigkeit von der Situation ab. Zum Glück gibt es das Vakuum, wo wir diese spezielle Situation vorfinden.

Die Kopplung der Körper ist eine Aussage über das Verhalten zu einem Zeitpunkt: Beim Koppeln entsteht eine mittlere Geschwindigkeit. Von da an habe ich aber einen neuen Körper, der einer Gleichung mit anderen Parametern unterworfen ist.

Newtons Gleichung ist seit 1687 bekannt [7]. Hat seit dem wirklich noch nie jemand diesen Fall mal durchgerechnet? Und wenn ja, wie kann man auch noch heute Galileis Beweis feiern?

Das wäre noch verständlich, wenn tatsächlich alle Körper immer gleich schnell fallen würden. Dann wäre zwar die Herleitung falsch, aber man ist ja zu einem richtigen Ergebnis gekommen. Niels Bohr soll einmal gesagt haben: *Gute Physik ist, von falschen Voraussetzungen auszugehen, falsche Schlüsse zu ziehen und zu einem richtigen Ergebnis zu gelangen.* Der Autor weiß nicht, ob dieses Zitat richtig ist, aber Bohrs Herleitung des Durchmessers des Wasserstoffatoms vollzog sich genau so.

Beim Fallgesetz haben wir einen richtigen Schluß, aber leider ein falsches Ergebnis. Die Körper fallen eben *verschieden* schnell. Und in dieser kongnitiven Dissonanz (siehe [22]) leben wir seit

Jahrhunderten.

Bevor wir auf die Frage zurückkommen, was denn nun ein Naturgesetz ist, wollen wir an einem gut bekannten Beispiel, den Zusammenhang zwischen mathematischen Lehrsätzen und Naturgesetzen diskutieren.

4 Der Satz des Pythagoras

Ist der Satz des Pythagoras ein Naturgesetz? “Natürlich nicht!”, würde man antworten, das ist ein mathematischer Lehrsatz. Er ist absolut und ewig gültig. Eine der Wahrheiten, auf die man sich Jahrtausende später immer noch verlassen kann.

Wir werden hier zeigen, wie aus einem mathematischen Lehrsatz ein Naturgesetz wurde.

4.1 Der Mathematische Lehrsatz

Für alle Fälle rufen wir uns den Satz des Pythagoras so, wie wir ihn brauchen, ins Gedächtnis. Wir betrachten zwei mathematische Objekte, erstens ein geometrisches, ein rechtwinkliges Dreieck und zweitens die algebraische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.

Beides hat auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun, stammt sogar aus verschiedenen mathematischen Teildisziplinen. Stellen wir uns unter den Größen a , b und c aber die Seitenlängen des Dreiecks vor, können wir das eine aus dem anderen herleiten und umgekehrt. Das besagt gerade der Satz des Pythagoras. Logische Schlüsse führen dazu, daß wir die Äquivalenz beider Objekte erkennen.

Sind a und b die Kathetenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks und c die Länge der Hypotenuse, so gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Und umgekehrt: Gilt für die Seitenlängen a , b und c eines Dreiecks die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist der Winkel zwischen den Seiten mit den Längen a und b ein rechter.

Wir haben es mit einer Äquivalenz (Tautologie) zu tun: Ich kann sagen “rechtwinkliges Dreieck” und ich kann sagen “die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat”. Ich sage in jedem Fall dasselbe. Es sind einfach Teilaspekte, die zum Wesen eines Objektes gehören.

Daß für uns so eine Äquivalenz nicht offensichtlich ist, sondern wir sie uns – manchmal mühsam – logisch herleiten *müssen*, kann man als menschliche Schwäche bezeichnen. Daß wir uns diesen Zusammenhang aber herleiten *können*, ist sicher eine Stärke der menschlichen Geisteskraft.

Alles im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras spielt sich in der geistigen Welt ab. Alle Objekte dazu (Seitenlängen, das Dreieck, ...) sind vom Menschen geschaffen (“ausgedacht” klingt vielleicht zu abwertend). Aber die Zusammenhänge sind nicht *subjektiv*. Jeder Mensch kann sie überprüfen und kommt zum selben Schluß. Subjektiv ist nur der Wunsch des Menschen, sich hierfür zu interessieren.

Ein Grund – zumindest bei den Ägyptern und Babyloniern – für dieses Interesse des Menschen ist, daß der Satz des Pythagoras in der physischen Welt als Naturgesetz zur Anwendung kommt.

4.2 Der Satz des Pythagoras in der Anwendung

Aus den ägyptischen Überlieferungen wissen wir, daß nach jeder Nilüberschwemmung die Felder neu abgemessen und abgesteckt werden müssen. Dazu ist es sinnvoll, ein großes Gebiet in kleine Teile zu teilen.

Es ist anzunehmen, daß die Teile einerseits verschieden groß sein, andererseits aber eine wohldefinierte Größe (Flächenmaß) haben sollen. Das führt uns zu dem Problem, einen Flächeninhalt zu bestimmen. Im Gegensatz zum Messen von Längen oder Volumina ist das Messen von Flächen im allgemeinen keinesfalls einfach, wie man vielleicht annehmen könnte. Die, die das meinen, sollen mal versuchen, den Flächeninhalt der Oberfläche eines Tieres zu bestimmen.

Häufig wurde der Flächeninhalt eines Feldes auch mit dem Gewicht der Erntemenge gemessen. Die Proportionalität von Fläche und Menge ist natürlich eine gewagte Annahme. Sie nimmt keine Rücksicht auf die Qualität des Bodens oder die Fertigkeiten des Bauern.

Die Ägypter konnten den Flächeninhalt eines Vierecks mit den Seitenlängen a, b, c, d (a und c bzw. b und d sind Längen gegenüberliegender Seiten) nach der Formel $(a + c)(b + d)/4$ berechnen. Der Flächeninhalt eines Dreiecks wurde mit derselben Formel bestimmt, indem man eine Seitenlänge Null gesetzt hat. Man sieht leicht, daß diese Formeln nur für rechtwinklige Vier- oder Dreiecke exakte Werte liefert (abgesehen von ein paar exotischen Fällen).

Für die Ägypter und auch Babylonier diente die Mathematik praktischen Zwecken. Erst die Griechen haben angefangen sich – so wie wir heute auch – aus Spaß mit Mathematik zu beschäftigen. Sie haben z.B. zur Bestimmung des Flächeninhaltes eines Dreiecks aus den drei Seitenlängen die exakte *Heronische Formel* hergeleitet. Jeder, der schon mal versucht hat den Flächeninhalte eines Dreiecks mit dieser Formel zu berechnen, wird verstehen, warum man sie zu praktischen Zwecken nicht benutzt.

Will man also den Flächeninhalt der Teile eines Feldes mit der obigen Formel exakt berechnen, muß man das Gelände in rechtwinklige Vier- oder Dreiecke aufteilen, was zum nächsten Problem führt, der Konstruktion eines rechten Winkels. Wie einfach dieses Problem ist, hängt davon ab, wo sich der rechte Winkel befinden soll. Senkrechte Wände kann man sehr gut mit einem Lot konstruieren, indem man “das Lot fällt”. Rechte Winkel auf einem Acker zu konstruieren ist weitaus schwieriger. Wer schon mal beim Hausbau beteiligt war und kein Lasermeßgerät zur Hand hatte weiß vielleicht, wie schwer es ist, zwei Wände zueinander senkrecht zu bauen. Man kann an eine Wand horizontal “kein Lot fällen”. Man überprüft die Markierung auf alle Fälle noch mal – natürlich mit dem Satz des Pythagoras.

Auch wenn wir Geometrie auf einem Blatt Papier betreiben, konstruieren wir am liebsten einen rechten Winkel indem wir *ein Lot auf eine Grundseite fällen*. Zur Not wird das Blatt so gedreht, daß sich die Grundseite vor uns befindet und von links nach rechts verläuft.

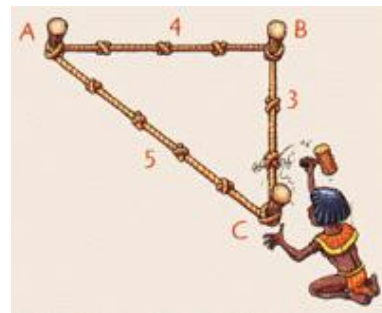
Zurück zu den Ägyptern: Es ist viel einfacher, einen 60° oder 120° Winkel zu konstruieren (gleichseitiges Dreieck). Mit diesen Figuren kann man auch die Fläche lückenlos auslegen, aber die Teile müssen gleich groß sein.

Bleibt nur der rechte Winkel. Bei den Ägyptern gab es einen speziellen und hochgeachteten Beruf, den der Harpedonapten⁴ (Seilspanner). Das wichtigste Arbeitsgerät war die Zwölfknotenschnur.

⁴Dieser Begriff ist griechisch, nicht ägyptisch. Das liegt daran, daß uns vieles aus der ägyptischen Geschichte auf griechisch überliefert wurde.

Beobachten wir mal so einen Harpedonapten bei der Arbeit: Er legt die Schnur so zu einem Dreieck, daß dessen Seitenlängen 3, 4 und 5 Knotenabstände betragen. Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist das Dreieck rechtwinklig. Wie von Zauberhand bildet die Schnur, wenn sie richtig benutzt wird, einen rechten Winkel.

Für die Ägypter war der Satz des Pythagoras offensichtlich kein Standardlehrsatz – wenn sie ihn überhaupt im allgemeinen kannten. Deshalb wurde die Funktionsweise der Zwölfknotenschnur wie ein Geheimnis gehütet.



4.3 Vom Theorem zum Naturgesetz

Jetzt ist auch klar, wie wir zum – für die Ägypter sehr wichtigen – Naturgesetz kommen, das da lautet:

Eine Zwölfknotenschnur legt sich immer – an den richtigen Stellen abgesteckt – zu einem rechten Winkel.

Der Satz des Pythagoras ist der Beweis. Wir müssen nur noch die experimentellen Bedingungen (das Vakuum im Galileiproblem) finden, unter denen wir den Satz anwenden können. Und das sind in etwa: Möglichst unelastische, dünne Schnur, in 12 gleichmäßige Teile durch möglichst kleine Knoten unterteilt. Diese Schnur wird dann an drei Stellen (da könnte man sogar eine kleine Schlaufe anbringen, damit man nicht jedes Mal nachzählen muß) im Abstand 3:4:5 abgesteckt.

Es ist gelungen, einen mathematischen Lehrsatz erfolgreich auf ein Stück Realität anzuwenden. Dieser Teil der Natur muß sich dann “gesetzmäßig” verhalten. Wir haben das Zwangsverhalten einer Zwölfknotenschnur entdeckt.

Daß es sich bei der Zwölfknotenschnur um ein künstliches Objekt handelt, soll uns nicht irritieren. Auch zwei Körper fallen nur im künstlich hergestellten Fallturm gleich schnell. Oder umgekehrt: Angenommen, wir stellen fest, daß unter ganz speziellen Bedingungen, nämlich im Fallturm, Körper gleich schnell – im Gegensatz zu ihrem Verhalten unter allgemeinen Bedingungen – fallen und interessieren uns für die Ursache, dann müssen wir letztlich Galileis Gedankengang vollziehen (oder Newtons Gleichung lösen, was aber viel schwieriger ist). Genauso wie ein Ägypter, dem zufällig eine Zwölfknotenschnur in die Hand fällt, und der ihr Geheimnis lüften will, letztlich den Satz des Pythagoras beweisen muß.

Bei der Konstruktion eines rechten Winkels handelt es sich um ein anspruchsvolles Problem. Heute würden wir das vielleicht nicht mehr als Naturgesetz bezeichnen, obwohl es sich prinzipiell nicht von anderen akzeptierten Naturgesetzen unterscheidet.

5 Schlußfolgerungen

5.1 Was sind Naturgesetze

Ein Naturgesetz ist immer eine Aussage über einen allgemeinen Fall. Das schließt endlich viele beobachtete und bekannte Fälle und noch viel mehr – potentiell unendlich viele – noch nicht beobachtete Fälle ein. Um die geht es dem Menschen natürlich. Er möchte Sicherheit für noch nicht eingetretene Situationen haben. Wir möchten z.B. vorhersagen können, wie ein Körper im Vakuum fällt, egal was er für eine Masse hat.

Es ist also offensichtlich, daß es keinen direkten Weg von den endlich vielen bekannten Situationen zu den potentiell unendlich vielen zukünftigen Situationen gibt. Letztlich ist das das Induktionsproblem, das seit Jahrhunderten von Philosophen diskutiert wird. Sehr anschaulich hat das D. Deutsch – dessen sonstige philosophische Ansichten der Autor allerdings nicht teilt – in einem fiktiven Dialog mit einem Krypto-Induktionisten geschildert [6].

Das Induktionsproblem (siehe [23]) wurde ausführlich von David Hume, Immanuel Kant und schließlich auch Karl Popper diskutiert. In [23] lesen wir: *Ein Induktionsschluss kann nicht analytisch sein, da hier sonst ein (deduktiver) logischer Schluss vorläge. Logische Schlüsse können aber nicht gehaltsvermehrend sein. Ein Induktionsschluss kann auch nicht synthetisch a priori wahr sein, denn sonst müssten mit seiner Hilfe gefolgerte Sätze ebenso wahr sein. Sie könnten sich dann nicht mehr a posteriori als falsch erweisen. Dies ist aber ein wesentliches Merkmal von auf Erfahrung basierenden Sätzen.*

Das Problem basiert auf einem Unverständnis des Zusammenhangs von geistiger (logische Schlüsse) und physischer Welt (Beobachtungen). Man meint, ein logischer Schluß kann keine zusätzliche Information schaffen (ist nicht *gehaltsvermehrend*), das können nur weitere Beobachtungen. Aber von denen kann man nie auf die Allgemeinheit schließen.

Hier wird nicht verstanden, daß das Denken, die Fähigkeit, logisch zu schließen, ein Erkenntnisorgan ist. Es wird künstlich ein Antagonismus zwischen Denken und Beobachten geschaffen, den es nicht gibt. Er baut darauf auf, daß man seinem Denken nicht zutraut, zu Erkenntnissen zu gelangen.

Aber nur in der geistigen Welt können unendlich viele Möglichkeiten oder allgemeine Situationen betrachtet werden. Dazu kennen wir eine Methode, das ist die Mathematik. Ein mathematischer Lehrsatz beschreibt das Verhalten mathematischer Objekte.

Zum Naturgesetz, zu einer Theorie, wird der mathematische Lehrsatz, wenn wir eine reale Situation in der physischen Welt finden, in der der Satz “anwendbar” ist. Dabei werden die mathematischen Begriffe auf Begriffe übertragen, mit denen wir das Verhalten von realen Objekten beschreiben. Auch letztere sind vom Menschen ausgedacht. Die “Geschwindigkeit” gibt es da draußen nicht real. Was es da draußen gibt, das ist Bewegung, schnellere und langsamere. Bis wir dieser Bewegung reelle Zahlen zugeordnet haben, ist es ein weiter Weg (siehe [15]). Diese Zahlen, die wir “Geschwindigkeit” nennen, müssen sich auf bestimmte Weise verhalten, wie, sagt uns der mathematische Lehrsatz.

Ein Naturgesetz ist also immer eine wahre mathematische Aussage, angewendet auf eine reale Situation. So wie ein mathematischer Lehrsatz immer und überall gilt, so gilt auch das Naturgesetz immer und überall. Das objektive, ewige und absolute Verhalten der mathematischen Objekte wird auf die realen Objekte übertragen.

Allerdings ist die Formulierung, daß ein mathematischer Lehrsatz immer und überall gilt nicht ganz korrekt. Ein mathematischer Lehrsatz existiert tatsächlich außerhalb von Raum und Zeit. Für ihn gibt es diese Begriffe gar nicht. Ein Naturgesetz dagegen gilt in Raum und Zeit. Dadurch können sich die Bedingungen, ob der mathematischer Lehrsatz anwendbar ist, verändern. Gibt es aus irgendeinem Grund kein Vakuum mehr, dann gilt auch das Fallgesetz nicht mehr (im Sinne von nirgendwo), obwohl Galileis Gedankengang nach wie vor richtig ist.

Experimente müssen ein Naturgesetz auch nicht “absichern”. Sie dienen auf zweierlei Weise. Einerseits sind sie so etwas wie eine Probe in der Mathematik. Man könnte zwischendurch, vor allem bei der Auswahl der realen Situation, ja einen Fehler gemacht haben. Andererseits bringen uns Experimente auf die Idee, was für mathematische Objekte wir betrachten sollten. Hier sieht man den prinzipiellen Unterschied zwischen einem Naturgesetz und einem Erfahrungssatz. Ein Erfahrungssatz muß sich immer auf Beobachtungen stützen und enthält immer

eine gewisse Unsicherheit. Nehmen wir z.B. den Erfahrungssatz: “Alle Schwäne sind weiß.” Er ist nicht durch einen mathematischen Lehrsatz (eine Theorie) abgesichert. Wir können versuchen, so einen Lehrsatz zu finden. Popper würde sagen, eine plausible Theorie dazu zu entwickeln. Haben wir so einen Lehrsatz gefunden, dann können wir seine Anwendung schon als Naturgesetz bezeichnen. Sollten wir dann einem schwarzen Schwan begegnen, wäre der Grad unserer Verwunderung viel größer als ohne Theorie.

Insofern ist es Unsinn, was in der wikipedia unter dem Begriff “Energieerhaltungssatz” steht, nämlich, daß es sich um eine “Erfahrungstatsache” handelt.⁵

Der Energieerhaltungssatz ist sogar eines von den Naturgesetzen, die in jeder realen Situation gelten, sie sind reine Tautologien (siehe [13]). Als extensive Größe ist die Energie additiv und deshalb eine Erhaltungsgröße. Man kann den Energieerhaltungssatz nicht falsifizieren!

Wäre der Energieerhaltungssatz eine “Erfahrungstatsache”, würden wir nicht besonders sicher sein, was den Energieerhaltungssatz betrifft. Wir würden ihn als ganz praktische Regel im Auge haben, uns aber auch nicht besonders wundern, wenn er plötzlich mal verletzt ist. Aber tatsächlich *wissen* wir, daß er gilt. Jedes Mal, wenn wir bei einem Experiment den Eindruck haben, er wäre verletzt, wissen wir sofort, daß wir irgendwo einen Fehler gemacht haben *müssen*. Naturgesetze sind richtig, weil wir uns nichts anderes vorstellen können. Wir können uns einen schwarzen Schwan vorstellen, auch wenn wir noch nie einen gesehen haben. Es spricht logisch nichts gegen einen schwarzen Schwan. Zumindest nicht so lange bis wir eine Theorie haben, aus der logisch folgt, daß es keine schwarzen Schwäne geben kann.

Erfahrungssätze haben auch Tiere. Auch sie wundern sich, wenn ein Ereignis nicht so eintritt, so wie sie es erwartet haben. Aber – im Gegensatz zum Menschen mit einer Theorie – stürzt es sie nicht in eine Sinnkrise.

5.2 Warum unterscheiden sich Galileis und Aristoteles Gedankengänge?

Wie wir gesehen haben, besteht der Unterschied zwischen den Sichtweisen des Galilei und des Aristoteles nicht darin, daß einer Recht hat und der andere nicht, sondern es ist eher Geschmackssache. Aristoteles betont die Wichtigkeit der Reibung und Galilei betont ihre Unwichtigkeit. Jeder hat in seiner Grenzsituation recht, exakt sind beide nicht. Im Vakuum fallen die Körper so wie Galilei es erwartet, in einem dichten Medium so, wie Aristoteles es behauptet. Hier ergibt sich natürlicherweise die Frage, warum Aristoteles im 4. Jh v. Chr. den Eindruck hatte, daß die Reibung die dominierende Kraft ist, wogegen Galilei etwa 2000 Jahre später meinte, zum Verständnis der “wahren Bewegung” muß man sich die Reibung wegdenken.

Es gibt noch weitere prinzipielle Unterschiede zwischen den Sichtweisen der beiden.

Bei Aristoteles heißt es: Losgelassene Körper kommen zur Ruhe. Galilei formulierte das Trägheitsprinzip, das als erstes Newtonsches Gesetz in die Physik eingegangen ist: *Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.*

Auch das ist ein Galileischer Lehrsatz, den man sich zwar vorstellen, aber nirgendwo beobachten kann, weil stets Kräfte wirken.

Es gab Objekte, die für die Griechen in ewiger Bewegung waren: Kosmos, Meer, Wolken. Die Sonne setzte die Natur in Bewegung.

Aristoteles sagt [3]: Was sich nicht regelmäßig verhält, wie die Kreisbahnen der Gestirne, muß für seine Bewegung eine äußere Ursache haben.

⁵Der Energieerhaltungssatz drückt die Erfahrungstatsache aus, dass die Energie eine Erhaltungsgröße ist, dass also die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems sich nicht mit der Zeit ändert [25].

Galilei zählt als Pionier der Experimentalphysik. Aristoteles wollte keine Schlüsse aus Labor-Experimenten ziehen: *Die nachinszenierte Natur verhält sich nicht so wie in der Realität.*

Aristoteles spricht von Schwere und Leichte eines Körpers, je nachdem, ob der Körper sich am liebsten nach unten oder nach oben bewegt. Bei Galilei gibt es nur “Schwere”.

Überhaupt gibt es bei Aristoteles zu jeder physikalischen Größe ein “Gegenteil”. Leichte und Schwere, Helligkeit und Dunkelheit, Wärme und Kälte, ... Das ist für uns heute eine merkwürdige Sichtweise. Es gibt für uns nur Helligkeit (mehr oder weniger) und Wärme (mehr oder weniger). Wie kommt es, daß Aristoteles und Galilei die Welt so verschieden sahen? War die Welt vielleicht eine andere? Konnte sich Galilei die Reibung einfach wegdenken, und Aristoteles nicht? Man kann sich gut vorstellen, daß sich vernunftbegabte Lebewesen im Wasser die Reibung nicht wegdenken können. Nimmt man Aristoteles’ Ansichten ernst, bedeuten sie entweder, daß die Reibung früher viel größer war, oder daß die Objekte leichter waren oder beides (wir wissen ja, daß es auf das Verhältnis a/M ankommt).

Gab es in den fast 2000 Jahre zwischen Aristoteles und Galilei vielleicht Ereignisse auf der Erde, die diese Größen verändert haben? Aber das ist eine ganz andere Geschichte ...

5.3 Die Galileische Revolution

Es gibt keinen Zweifel, daß sich die Methoden, Wissenschaft zu betreiben, in der Zeit zwischen Aristoteles und Galilei stark geändert haben. Es wird von einer Galileische Revolution gesprochen, wenn man diese Änderung im Blick hat. Natürlich geht es hier nicht um das Fallgesetz allein. Man braucht nur die Werke von Aristoteles und Galilei zu lesen um diesen Unterschied festzustellen. Die gesamten Werke von Galilei lesen sich viel moderner. Es ist eine Freude, seine Gedankengänge nachzuvollziehen. Aristoteles dagegen wirkt schon recht antiquiert.

Zu Aristoteles’ Zeiten gab es die Idee von Naturgesetzen gar nicht. Rudolf Steiner schreibt [10]: *In Wahrheit ist die Vorstellung der Gesetzmäßigkeit (des Naturgeschehens) erst 400 Jahre alt, denn sie rührt im Grunde genommen von Galilei her. Wenn man vor Galilei zurückgeht, so ist gar keine Ahnung davon da, daß alles von einer solchen Gesetzmäßigkeit durchzogen ist.*

Wie immer bleibt bei einer Revolution häufig Gutes aus der Vergangenheit auf der Strecke. Steiner schreibt weiter [11]: *Ein großer Umschwung tritt gerade mit Galilei uns vor Augen. Die gewöhnlichste Erscheinung, wie sie heute in der Physik erklärt wird, wurde vor Galilei anders geschildert als nach ihm. Jemand wirft zum Beispiel einen Stein. Da sagt man heute, der Stein behält durch das Beharrungsvermögen so lange seine Bewegung bei, bis sie unter dem Einfluß einer anderen Kraft aufgehoben wird. Vor Galilei dachte man ganz anders; da war man davon überzeugt, daß, wenn der Stein weiter gehen soll, jemand den Stein fortstoßen muß. Etwas Aktives stand hinter dem fliegenden Stein. Galilei hat vollständig die Menschen umdenken gelernt, aber so, daß sie gelernt haben, die Welt als einen Mechanismus aufzufassen.*

Von dieser mechanistischen Auffassung ist man inzwischen – vor allem durch die Entwicklung der Quantenmechanik, einer weiteren Revolution in der Denkweise der Menschen – wieder stark abgekommen.

Galilei wird als der Naturforscher betrachtet, der Aristoteles vom Sockel gestoßen hat. Dabei muß man beachten, welche Rolle Aristoteles im späten Mittelalter für die Naturwissenschaft gespielt hat.

Vor allem initiiert durch Albertus Magnus und seinen Schüler Thomas von Aquin wurde Aristoteles seit dem 13. Jahrhundert als das Maß aller Dinge in der Naturwissenschaft etabliert.

Der Status von Aristoteles ist hier einzigartig. Das ist umso bemerkenswerter, als in der Zeit des christlichen Mittelalters nur wenigen "Heiden" so eine Ehre zuteil wurde.

Galilei war, wie andere seiner Zeit, ein Gegner des Aristoteles, aber nur des mißverstandenen Aristoteles. Dagegen war er von dem durchdrungen, was man nennen kann: Kultur des Gedankens, Verinnerlichung des Gedankens bis zum logischen Erfassen der äußeren Wirklichkeit (dies war eine Folge der jahrhundertelangen Aristoteles-Studien der Kulturträger). Aber nie hatte er sich dem Gedanken entfremdet, daß durch das, was man als Logik anerkennt, was sich der Mensch an Gesetzmäßigkeit des Gedankens erobert hat, der menschliche Geist in nacheinanderfolgenden Zeitmomenten begreifen kann, was in Raum und Zeit ausgebreitet ist. Aber diesem menschlichen Verstande gegenüber, der nacheinander, durch die Abwägung dessen, was die Sinne schauen, die Geheimnisse des Weltalls erkennen kann, sah Galilei den göttlichen Geist, den göttlichen Verstand, der die Welt durchlebt und durchwebt, und von dem er ehrfurchtsvoll fühlte, daß er in einem einzigen Augenblick das Weltall vordenkt, nicht nachdenkt wie der Mensch. So war auch für Galilei aller Welterscheinung zugrunde liegend das Spirituelle, der göttliche Geist (siehe [12]).

Galilei hat sich als Nachfolger von Aristoteles gesehen. Den Antagonismus zwischen beiden haben die späteren Interpreten geschaffen.

Trotz seiner Kritik war Aristoteles für Galilei ein Vorbild. *In einem während seiner letzten Jahre verfaßten Brief behauptet Galilei, ein wahrer Nachfolger von Aristoteles zu sein (eine Behauptung, die seinen Briefpartner sichtlich überraschte). Er bezieht sich dabei auf die besondere Sorgfalt, alles exakt zu begründen, und darauf, daß, „... einer der sicheren Wege, der Wahrheit zu folgen, darin besteht, die Erfahrung vor jegliche Beweisführungen zu stellen, so daß wir sicher sind, daß jeglicher Trugschluß, wenn auch versteckt, in letzterem liegt, so daß es nicht möglich ist, daß eine vernünftige Erfahrung der Wahrheit widerspricht. Und dies ist auch ein von Aristoteles hochgeschätzter Grundsatz, der diesen weit vor den Wert und das Gewicht irgendwelcher Autoritäten in der Welt stellte... dabei sollten wir uns nicht nur den Autoritäten anderer ausliefern, sondern, sobald die Erfahrung das Gegenteil zeigt, auch uns selbst die Autorität absprechen. (siehe [9])*

Sogar Kepler orientierte sich in seinen *Harmonice mundi* noch stark an Aristoteles, wenn auch nicht in dem Maße wie an dessen Lehrer Plato.

Ausführlich wird eine wissenschaftliche Revolution am Beispiel der Kopernikanischen Revolution vom Autor in [17] behandelt.

Literatur

- [1] G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Leiden 1638. Deutsch: *Unterredung und mathematische Demonstration über zwei neue Wissenszweige die Mechanik und die Fallgesetze betreffend*. Leipzig 1890.
- [2] Die Bibel. Josua 10,13-14
- [3] Aristoteles, *Physik*
- [4] W. Heisenberg, *Physik und Philosophie*, S. 117
- [5] K. Popper, *Logik der Forschung*
- [6] D. Deutsch, *Die Physik der Welterkenntnis*

- [7] I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, London 1687
- [8] E. Mach, Erkenntnis und Irrtum. Skizzen zur Psychologie der Forschung. Wien 1905
- [9] S. Drake, Galileo at Work. University of Chicago Press, Chicago, 1978.
- [10] R. Steiner, GA 109, Seite 288, (Ausgabe 1979, 304 Seiten); Das Prinzip der spirituellen Ökonomie im Zusammenhang mit Wiederverkörperungsfragen. Ein Aspekt der geistigen Führung der Menschheit (1909)
- [11] R. Steiner, GA 112, Seite 237 (Ausgabe 1959, 292 Seiten) Das Johannes-Evangelium im Verhältnis zu den drei anderen Evangelien, besonders zu dem Lukas-Evangelium (1909)
- [12] R. Steiner, GA 61, Seite 367 (Ausgabe 1962, 536 Seiten) Menschengeschichte im Lichte der Geistesforschung (1911/1912)
- [13] H. Stephan, Der Energie-, Impuls- und Längenerhaltungssatz
- [14] H. Stephan, Geistige und physische Welten
- [15] H. Stephan, Extensive und intensive Größen
- [16] H. Stephan, Mathematische Grundlagen
- [17] H. Stephan, Raum und Zeit
- [18] https://de.wikipedia.org/wiki/Empirische_Formel
- [19] https://de.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Battista_Benedetti
- [20] <https://de.wikipedia.org/wiki/Naturgesetz>
- [21] https://de.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider#Kosten
- [22] https://de.wikipedia.org/wiki/Kognitive_Dissonanz
- [23] <https://de.wikipedia.org/wiki/Induktionsproblem>
- [24] https://de.wikipedia.org/wiki/Fallturm_Bremen
- [25] <https://de.wikipedia.org/wiki/Energieerhaltungssatz>
- [26] Meyers Konversations-Lexikon Dritte gänzlich umgearbeitete Auflage. Elfter Band. Verlag des Bibliographischen Instituts. Leipzig 1877