7 Dynamik von Teilchen (Massepunkten)

7.1 Newtonsche Mechanik

7.1.1 Postulate

Die Newtonsche Mechanik basiert explizit oder implizit auf ein paar prinzipiellen Postulaten. Sie haben die Denkweise der nachfolgenden Physiker bis heute entscheidend beeinflußt. Diese Postulate erscheinen weitgehend offensichtlich, haben aber zum Teil paradoxe Konsequenzen, was ein Indiz dafür ist, daß selbst die klassische Mechanik einer Weiterentwicklung bedarf. Hierbei ist nicht die gut bekannten Unzulänglichkeiten der klassische Mechanik bei großen Geschwindigkeiten (relativistische Physik) oder kleinen Skalen (Quantenphysik) gemeint. Selbst in den für die klassische Physik typischen Bereichen mittelgroßer Objekte mit kleinen Geschwindigkeiten gibt es Unverstandenes, auf das insbesondere Ernst Mach hingewiesen hat.
Wir betrachten folgende Postulate (einge Postulate von Newton sind absichtlich nicht aufgenommen worden):

- Es gibt einen absoluten Raum, er ist dreidimensional und euklidisch. Alle Bewegungen spielen sich relativ zu diesem Raum ab.

  Hier wies Mach darauf hin, daß es ein prinzipieller Unterschied ist, ob sich die Bewegung der Objekte relativ zu einem festen gedachten absoluten Raum oder relativ zu einem als unbeweglich angenommen, aber real existieren, Fixsternhimmel handelt. Insbesondere erklärt Mach die träge Masse eines Objektes mit der Anziehungskraft des gesamten Fixsternhimmels. Das ist ebenfalls weitgehend widerspruchsfrei und erklärt die träge Masse als Funktion der schweren Masse, was auch die Äquivalenz beider Massen verständlicher macht.

- Es gibt eine absolute kontinuierliche Zeit, die als reeller Parameter beschrieben werden kann. Alle Bewegungen können als Funktionen dieser Zeit betrachtet werden. Newtons Zeitdefinition:

  Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.

  Mach wies daraufhn, daß man jeden äquivalenten Parameter (z.B. den Drehwinkel der Erde) zur Parametrisierung der Trajektorien nehmen könnte. D.h., die Newtonsche Zeit ist nicht die "gefühlte Zeit".

- Jeder Körper hat eine träge Masse m, die dazu führt, daß jeder Körper einer Bewegungsänderung einen Widerstand entgegensetzt.

- Der Impuls (amount of motion, Bewegungsmenge) eines Objektes ist das Produkt seiner Masse und seiner Geschwindigkeit (als Vektor): $p = mv$.

- Die kinetische Energie eines Objektes ist das halbe Produkt seiner Masse mit dem Quadrat des Betrages seiner Geschwindigkeit $T = \frac{1}{2}mv^2$.

- Die Geschwindigkeit ist die Zeitableitung seiner Trajektorie $v(t) = \dot{x}(t)$. v ist der Tangentialvektor an die Kurve .

- Die Änderung der Bewegungsmenge ist die Kraft: $\dot{p} = f$ (zweites Newonsches Gesetz).

  Newton postuliert – im Gegensatz zur weit verbreiteten Meinung – nicht die Gleichung $f = ma = m\ddot{x}$ (Kraft ist Masse mal Beschleunigung) sondern bilanziert die zeitliche

Änderung einer extensiven Größe, nämlich $\dot{p}$, und setzt sie einer angenommenen Triebkraft f gleich.

Davon abgesehen, ist $f = m\ddot{x}$ natürlich nur die richtige Gleichung, wenn die Masse nicht von der Zeit abhängt (bei Raketen ist das gerade nich der Fall).

Die Gleichung $\dot{p} = f$ kann man als Definition der Kraft verstehen.

Newtons Verdienst ist nicht so sehr die Aufstellung dieser Gleichung, sondern die Erkenntnis, daß es spezielle, besonders einfache, Potentialkräfte gibt, mit denen sich etwa die Planetenbahnen beschreiben lassen.

- Newton nennt seine 3 Gesetze (1. Bewegung ist gleichförmig und geradlinig, wenn keine äußeren Kräfte wirken; 2. $\dot{p} = f$; 3. actio = reaktio) Bewegungsgesetze. Fälschlicherweise wird das 3. Gesetz heute meistens "Kraft = Gegenkraft" genannt (daran ist Euler schuld). Man versteht dann nicht (abgesehen von vielen anderen Mißverständnissen), was dieses Gesetz mit Bewegung zu tun haben soll. Bei Newton ist "actio" (nach A.P.Smirnov) das Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit, d.h. die Zeitableitung der Energie. $a(t) = -b(t)$ bedeutet dann $\frac{d}{dt}(A(t) + B(t)) = 0$ (mit $A' = a$ und $B' = b$), die Erhaltung der Energie. Damit geht der Energieerhaltungssatz auch auf Newton zurück (200 Jahre vor Helmholtz).

  Dieses 3. Gesetz ist bei Newton das zentrale Gesetz, die anderen beiden sind eher Definitionen.

7.1.2 Typische Kräfte

Typische Kräfte sind:

- Gravitaionskraft $F = G\frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^2}$
- Gravitaion auf der Erde (konstante Kraft), $F = +mg$
- Feder (lineare Kraft), $F = -cx$
- Reibung (lineare geschw.abh. Kraft), $F = -\alpha\dot{x}$.

7.1.3 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Die einfachste eindimesionale Gleichung beschreibt ein Massestück, auf das eine Federkraft (Ruheauslenkung sei 0) und eine Reibungskraft wirkt. Die entsprechende Gleichung mit Anfangsort und - geschwindigkeit ist

$$m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x} - cx \ , \quad x(0) = x_0 \ , \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Hier ist $x(t)$ die Auslenkung um den Ruhepunkt.
Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big((v_0 + x_0\lambda_2)e^{-\lambda_1 t} - (v_0 + x_0\lambda_1)e^{-\lambda_2 t}\Big)$$

mit

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2m} \mp \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{c}{m}}$$

7.1.4 Die Newtonsche Gleichung im Banachraum

Betrachtet man n Punktmassen, so wird üblicherweise als physischer Raum $\mathbb{R}^{3n}$ betrachtet. D.h., es wird angenommen, daß sich jedes Objekt in seinem eigenen physischen Raum bewegt. Das ist eine mathematische Annahme, die gerechtfertigt ist, solange die Objekte als Punkte betrachtet werden können. Dann fällt es nicht so ins Gewicht, wenn sich die Objekte im selben Punkt aufhalten, was möglich ist, tatsächlich aber dem Archimedischen Axiom: "Wo ein Körper ist, kann nicht ein anderer sei.", widerspricht.
Wir treiben diesen Zugang noch weiter und betrachten als physikalischen Orts-Raum einen allgemeinen Banachraum $\mathcal{X}$. Es ist dann $x(t) \in \mathcal{X}$ und $\dot{x}(t) \in \mathcal{X}$.
Wir nehmen an, daß es ein Potential $U : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ gibt, dessen negative Ableitung $f = -U'(x) \in \mathcal{X}^*$ die Kraft sei. Den Impuls $p(t)$ und seine Zeitableitung $\dot{p}(t)$ verorten wir dann im dualen Raum $\mathcal{X}^*$. Dann lautet die Newtonsche Gleichung $\dot{p}(t) = -U'(x)$ und ist als Gleichung in $\mathcal{X}^*$ zu verstehen.
Betrachtet man das Problem auf Mannigfaltigkeiten, dann ist $\dot{x}(t)$ ein Vektor aus dem Tangentialraum und $f, p(t)$ und $\dot{p}(t)$ sind Kovektoren aus dem Kotangentialraum.
Die Gleichung $\dot{p}(t) = -U'(x)$ ist eine Bilanzgleichung. Sie muß durch eine Zustandsgleichung, also einen Zusammenhang der extensiven Größe p und der intensiven Größe x ergänzt werden. Wir kennen keinen solchen Zusammenhang, aber wir kennen einen Zusammenhang von p und der Geschwindigkeit v, nämlich $p = mv$. Um die Gleichung abzuschließen postulieren wir $v(t) = \dot{x}(t)$. Das ist nicht die intensive Größe "mittlere Geschwindigkeit", die wir als $v = L/T$ definieren können, sondern die Tangente an die Trajektorie. Wir postulieren als tatsächlich, daß der Impuls proportional zur Tangente an die Trajektorie ist: $p = m\dot{x}$. Wir nennen $\dot{x}(t)$ trotzdem "Geschwindigkeit". Im englischen könnte man zwischen "speed" $v = L/T$ und "velocity" $v(t) = \dot{x}(t)$ unterscheiden.
In der gesamten klassischen Mechanik, wird $v(t) = \dot{x}(t)$ nur am Ende zum Lösen der Bewegungsgleichung benutzt. Alle Herleitungen erfolgen unter der impliziten Annahme, daß $v(t)$ und $x(t)$ unabhängige Variablen sind, Zustandsgrößen, die sich unahängig voneinander ändern können, obwohl formal mit der Kenntnis von $x(t)$ als Funktion von t auch $v(t) = \dot{x}(t)$ eindeutig festgelegt ist. Implizit nehemen wir an, daß die Zeit zu jedem Zeitpunkt angehalten ist. Für festgehaltenen Zeitpunkt t können $v(t)$ und $x(t)$ tatsächlich beliebige Werte annehmen. Und der Begriff der Zeitableitung verliert seinen Sinn.
Im Banachraum sei die Masse $\mathbf{M} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ein positiver linearer Operator, der die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ auf den Impuls abbildet: $p = \mathbf{M}\dot{x}(t)$. Handelt es sich um n Teilchen mit den Massen $m_1, ..., m_n$, dann ist $\mathbf{M}$ eine Diagonalmatrix der Ordnung $3n$ auf deren Diagonalen die Einträge $m_1, m_1, m_1, m_2, ..., m_n$ stehen. Betrachten wir eine allgemeine Matrix $\mathbf{M}$, so nehmen wir de facto an, daß die Masse eines Teilchens von der Richtung abhängen kann. Das ergibt eine Matrix aus 3×3-Blöcken auf der Diagonale.
Das ist tatsächlich eine sinnvolle Beschreibung z.B. der Bewegung von Elektronen im Halbleiterkristall. Die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Kristallgitter kann man durch Elektronen mit einer "effektiven" Masse beschreiben, die von den Kristallachsen und damit von der Orientierung des Kristall im dreidimensionalen Raum abhängt.
Desweiteren kann man sich vorstellen, daß es sinnvoll sein kann, anzunehmen, daß man zwei Massen eine "gemeinsame Masse" zuordnen kann. Das ergibt schließlich eine allgemeine Matrix.
Zusammengafaßt erhalten wir als Newtonsche Gleichung folgendes System:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -U'(x) \\ \mathbf{M}\dot{x}(t) &= p(t) \end{aligned}$$

Beides sind Gleichungen in $\mathcal{X}^*$. Zur Lösung dieses Systems müssen ein Anfangsortspunkt $x(0)$ und ein Anfangsimpuls $p(0)$ gegeben sein, was der Vorgabe einer Anfangsgeschwindigkeit entspricht, wenn $\mathbf{M}$ invertierbar ist.
Hängt die Masse nicht explizit von der Zeit ab, kann man formal die zweite Gleichung nach der Zeit ableiten und in die erste einsetzen, was zur bekannten Gleichung (Kraft ist Masse mal Beschleunigung) führt:

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) \quad = \quad -U'(x),\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0$$

7.1.5 Potentialkräfte und Impulserhaltungssatz

Betrachtet man ein System von Federn zwischen den Massepunkten (siehe das erste Kapitel, wir verzichten hier der Einfachheit halber aber auf die kraftlose Auslenkung b), dann ist die potentielle Energie

$$U(x) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{D}x, \mathbf{CD}x\rangle$$

und seine Gateauxableitung (die Kraft)

$$U'(x) = \mathbf{D}^*\mathbf{CD}x$$

mit der Inzidenzmatrix $\mathbf{D}$. Wie wir wissen besteht $\mathbf{D}x$ aus Differenzen der Koordinaten. $\mathbf{CD}x$ ergibt die Kraft in den Federn und $\mathbf{D}^*\mathbf{CD}x$ sammelt alle Kräfte wieder an den den richtigen Punkten ein.
Die Kräfte in den Federn sind besonders einfache (lineare) Potentialkräfte. Kompliziertere Potentialkräfte lassen sich mit einer allgemeinen Funktion C als $C(\mathbf{D}x)$ darstellen. In diesem Fall ist die Kraft

$$U'(x) = \mathbf{D}^*C(\mathbf{D}x)$$

und die Newtonsche Gleichung lautet

$$\dot{p}(t) = -\mathbf{D}^*C(\mathbf{D}x)$$

Hieraus folgt

$$\frac{d}{dt}\langle p(t), \mathbb{1}\rangle = \langle \dot{p}(t), \mathbb{1}\rangle = -\langle \mathbf{D}^*C(\mathbf{D}x), \mathbb{1}\rangle = \langle C(\mathbf{D}x), \mathbf{D}\mathbb{1}\rangle = 0$$

(da $\mathbf{D}\mathbb{1} = 0$) der Impulserhaltungssatz. Der Beweis ist exakt derselbe wie der Beweis des "Volumenerhaltungssatzes" in der pots-and-tubes Aufgabe. Dort sollte man sich die Erhaltung des Volumens einfach als Zerlegung eines Gesamtvolumens vorstellen. Und auch hier ist der Impulserhaltungssatz kein geheimnisvolles Naturgesetz sondern nur die Zerlegung eines Gesamtimpulses in Teile. Der Unterschied besteht nur darin, daß wir das Volumen "sehen" (deshalb wundern wir uns nicht, daß es erhalten bleibt), den Impuls dagegen nicht.

7.1.6 Der Energieerhaltungssatz

Stellt man sich ein System von gespannten Federn und Massen vor, die zum Zeitpunkt $t = 0$ ruhen, also festgehalten werden, und läßt dann alle Massen gleichzeitig los, so beginnen sie sich zu bewegen und für ausreichend kurze Zeit senkt sich natürlich die potentielle Energie. Diese Energie wird in kinetische Energie der Massen verwandelt.
Es bietet sich an, das Funktional $T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$T(y) \quad = \quad \frac{1}{2}\langle \mathbf{M}y, y\rangle\Big|_{y=\dot{x}}$$

kinetische Energie und die Summe $T(\dot{x}) + U(x)$ Gesamtenergie zu nennen. Es stellt sich dann heraus, daß ein physikalisches System, dessen Trajektorie Lösung der Newtonschen Gleichung ist, die Gesamtenergie erhält. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle \dot{x}(t), \mathbf{M}\dot{x}(t)\rangle + U(x)\right) = \langle \dot{x}(t), \mathbf{M}\ddot{x}(t)\rangle + \langle \dot{x}(t), U'(x)\rangle = \langle \dot{x}(t), \mathbf{M}\ddot{x}(t) + U'(x)\rangle = 0$$

Den gefundenen Zusammenhang

$$-\langle \dot{x}(t), U'(x)\rangle = \langle \dot{x}(t), \mathbf{M}\ddot{x}(t)\rangle$$

könnte man als Newtons "actio (linke Seite, Ursache) = reactio (rechte Seite Wirkung)" interpretieren. Beide Seiten sind gerade das Produkt von Kraft und Geschwindigkeit.
Und umgekehrt, nimmt man an, daß $T(\dot{x}) + U(x)$ die Gesamtenergie ist, die erhalten bleiben sollte, so folgt daraus

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle \dot{x}(t), \mathbf{M}\dot{x}(t)\rangle + U(x)\right) = \langle \dot{x}(t), \mathbf{M}\ddot{x}(t)\rangle + \langle \dot{x}(t), U'(x)\rangle = \langle \dot{x}(t), \mathbf{M}\ddot{x}(t) + U'(x)\rangle$$

Unter der Annahme, daß die Geschwindigkeit eigentlich beliebig – genauer, eine unabhängige Variable – sein kann, folgt

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) + U'(x) = 0 \ ,$$

die Newtonsche Gleichung.

7.1.7 Geradlinig gleichförmige Bewegung

Eine kräftefreie Bewegung ist eine Bewegung eines Systems in einem konstanten Potential. Es genügt der Gleichung $\mathbf{M}\ddot{x}(t) = 0$. Unter der Annahme, daß die Masse positiv ist, folgt $\ddot{x}(t) = 0$, was zusammen mit den Anfangswerten die Lösung

$$x(t) = x_1 t + x_0$$

ergibt.

7.2 Lagrangemechanik

Die Newtonsche Mechanik baut auf dem Grundprinzip: *Die zeitliche Änderung des Impulses ist die Kraft*, auf. Letztlich ist das die Definition der Kraft. Ausgehend von bekannten Trajektorien (z.B. den Planetenbahnen), wird versucht eine Kraft zu erraten und diese dann auf andere Beispiele anzuwenden. Diese Konzept hat eine Reihe von Nachteilen:

- Das Kraftkonzept an sich insbesondere der Widerspruch zwischen actio = reactio und Kraft = Beschleunigung. Dieser Widerspruch löst sich nur auf, wenn man eine Trägheitskraft einführt. Dann lautet die Newtonsche Gleichung $F_{träg} = F_{äußere}$, was einer Tautologie nahekommt.
- Lokalität: Die Newtonsche Gleichung beschreibt den Zusammenhang von Beschleunigung und Kraft zu einem Zeitpunkt.
- Abhängigkeit von Koordinatentransformationen (je nach Koordinatensystem sieht dieselbe Kraft und damit auch die Gleichung anders aus).

  Geht man z.B. in der Newtonschen Gleichung zu Polar- oder Kugelkoordinaten über, erkennt man die Newtonschen Gleichung kaum wieder. Insbesondere hängt die neue kinetische Energie nicht nur von den neuen Geschwindigkeiten sondern auch von den neuen Koordinaten selbst ab.
- Sogenannte Zwangskräfte, d.h. Kräfte, die die Trajektorie zwangsläufig festlegen (z.B. zwei durch einen starren Stab verbundene Massepunkte) passen nicht ins Konzept. Man übergeht diesen Mangel durch das Postulat: Zwangskräfte verrichten keine Arbeit.

7.2.1 Die Lagrangegleichung

Zwischen der Veröffentlichung der Newtonschen Gleichung und Lagranges Werk "Analytische Mechanik" liegen 100 Jahre, die wir hier überspringen. In dieser Zeit hat man gelernt, mit partiellen Ableitungen umzugehen und hat die verschiedensten dynamischen Probleme untersucht. Dabei kristallisierte sich heraus, daß sich alle betrachten mechanischen Systeme durch eine Gleichung der Form

$$\frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}}L(x,\dot{x}) - \partial_x L(x,\dot{x}) = 0 \tag{53}$$

mit einer geeigneten Lagrangefunktion $L(x,y)$ beschrieben lassen. Hier ist zu beachten, daß $\partial_{\dot{x}}L(x,\dot{x})$ stets als $\partial_y L(x,y)|_{y=\dot{x}}$ zu verstehen ist. D.h., man leitet die Funktion L nach der zweiten Variaben y (das ist die Geschwindigkeit) ab und setzt anstelle von y am Ende die Zeitableitung der Trajektorie ein.

7.2.2 Lagrangegleichung und Newtonsche Gleichung

Es sei

$$L(x,y) = \frac{1}{2}\langle y, \mathbf{M}y\rangle - U(x) \ .$$

Hat U ein globales Minimum und ist $\mathbf{M}$ ein positiver Operator, so ist L eine Lagrangefunktion. Aus diesem Funktional erhalten wir die Eulergleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}\langle \dot{x}(t), \mathbf{M}\dot{x}(t)\rangle - U(x)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\langle \dot{x}(t), \mathbf{M}\dot{x}(t)\rangle - U(x)\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{M}\dot{x}(t) + U'(x) = \mathbf{M}\ddot{x}(t) + U'(x) \end{aligned}$$

was exakt die Newtonsche Gleichung ist.

7.2.3 Was ist die kinetische Energie?

Die analytische Mechanik ist mit der Lagrangegleichung auf die Frage zurückgeführt, was für meine Aufgabe wohl eine geeignete Lagrangefunktion wäre. Hier ist – wie immer beim Arbeiten mit Lagrangefunktionen – gutes Raten angesagt. Der typische Ansatz ist

$$L(x, y) = T(y) - U(x)$$

mit zwei nach unten beschränkten Funktionen T und U. Dabei wird meistens U als potentiell und T als kinetische Energie interpretiert, was – wie wir gesehen haben – im Fall $T(y) = \frac{1}{2}\langle y, \mathbf{M}y\rangle$ sinnvoll war, weil $T(y) + U(x)$ eine Erhaltungsgröße war und deshalb als Energie interpretiert werden konnte.
Wir wollen jetzt untersuchen, ob das auch im allgemeinen richtig ist. Die Lagrangegleichung zu $L(x, y) = T(y) - U(x)$ ist

$$T''(\dot{x})\ddot{x} + U'(x) = 0 \tag{54}$$

Hier ist $U'(x) \in \mathcal{X}^*$ und $T''(\dot{x}) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ ein linearer Operator.
Wie wir im Beispiel gesehen haben, läßt sich $U(x)$ als potentielle Energie und $-U'(x)$ als Kraft interpretieren.
Es wird sich herausstellen, daß die Lagrangegleichung die Gesamtenergie erhält.
Wir zeigen hier, daß die Lagrangegleichung die Summe $T(\dot{x}) + U(x)$ im allgemenen nicht erhält, was ein Indiz dafür ist, daß $T(\dot{x})$ nicht die kinetische Energie ist oder der Energieerhaltungssatz verletzt ist. Unter Benutzung von Gleichung (54) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(T(\dot{x}) + U(x)\big) &= \big[T'(\dot{x}), \ddot{x}\big] + \big[U'(x), \dot{x}\big] = \big[T'(\dot{x}), \ddot{x}\big] - \big[T''(\dot{x})\ddot{x}, \dot{x}\big] = \\ &= \big[T'(\dot{x}), \ddot{x}\big] - \big[T''(\dot{x})\dot{x}, \ddot{x}\big] = \big[T'(\dot{x}) - T''(\dot{x})\dot{x}, \ddot{x}\big] \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist 0 entweder für $\ddot{x} = 0$ (der uninteressante Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung) oder für $T'(\dot{x}) = T''(\dot{x})\dot{x}$ also $T'(y) = T''(y)y$. Diese Gleichung läßt sich lösen, die Lösung ist $T(y) = \frac{1}{2}\langle y, \mathbf{A}y\rangle$ mit einem beliebigen linearen symmetrischen Operator $\mathbf{A}$.
D.h., $T(\dot{x})$ kann nur im sehr speziellen quadratischen Fall als kinetische Energie interpretiert werden. Leider wird in den meisten Lehrbüchern zur analytischen Mechanik $T(\dot{x})$ als kinetische Energie bezeichnet, was dazu führt, daß man nur quadratische Energien betrachhten kann (damit der Energieerhaltungssatz gilt). Die genaue Bedeutung von $T(\dot{x})$ ist die Legendretransformierte der kinetischen Energie, wie im nächsten Kapitel klar werden wird.
Interpretiert man (54) als Newtonsche Gleichung, so ist $-U'(x)$ die Kraft und $T''(\dot{x})$ die Masse (die Krümmung der Legendretransformierten der kinetischen Energie).

7.2.4 Lagrangegleichung für quadratische Sattelfunktionen

Als weiteres Beispiel betrachten wir die allgemeine quadratische Lagrangefunktion aus dem ersten Kapitel

$$L(x,y) = \frac{1}{2}\langle y, \mathbf{C}^{-1}y\rangle + \langle y, \mathbf{D}x\rangle - \frac{1}{2}\langle x, \mathbf{B}x\rangle - \langle x, f\rangle - \langle y, b\rangle$$

Wir setzen $y = \dot{x}$ und $\mathbf{M} = \mathbf{C}^{-1}$ und suchen die Lagrangegleichung zum Lagrangian

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \mathbf{M}\dot{x}\rangle + \langle \dot{x}, \mathbf{D}x\rangle - \frac{1}{2}\langle x, \mathbf{B}x\rangle - \langle x, f\rangle - \langle \dot{x}, b\rangle$$

Als Lagrangegleichung ergibt sich damit

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}L - \frac{\partial}{\partial x}L &= \frac{d}{dt}\Big(\mathbf{M}\dot{x} + \mathbf{D}x - b\Big) - \Big(\mathbf{D}^*\dot{x} - \mathbf{B}x - f\Big) = \\ &= \mathbf{M}\ddot{x} + \mathbf{D}\dot{x} - \mathbf{D}^*\dot{x} + \mathbf{B}x + f = \mathbf{M}\ddot{x} + (\mathbf{D} - \mathbf{D}^*)\dot{x} + \mathbf{B}x + f \end{aligned}$$

Das ergibt die Gleichung

$$\mathbf{M}\ddot{x} = -(\mathbf{D} - \mathbf{D}^*)\dot{x} - \mathbf{B}x - f$$

Das ist die Newtonsche Gleichung wobei $\mathbf{M}$ die Masse ist und auf der rechten Seite Kräfte stehen:

- $-f$ ... äußere konstante Kraft (z.B. Gravitation)
- $-\mathbf{B}x$ ... lineare Kraft (z.B. Feder)
- $-(\mathbf{D} - \mathbf{D}^*)\dot{x}$ ... antisymmetrische Kraft proportional zur Geschw. (z.B. Magnetfeld).

  Diese Kraft ist keine Reibungskraft. (Eine mögliche Reibungskraft $\langle \dot{x}, b\rangle$ ist verschwunden.) Sie verrichtet keine Arbeit, was man daran sieht, daß die kinetische Energie – wenn man $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ und $f = 0$ setzt – erhalten bleibt:

  $$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\langle \dot{x}, \mathbf{M}\dot{x}\rangle = \langle \mathbf{M}\ddot{x}, \dot{x}\rangle = -\langle (\mathbf{D} - \mathbf{D}^*)\dot{x}, \dot{x}\rangle = -\langle \mathbf{D}\dot{x}, \dot{x}\rangle + \langle \dot{x}, \mathbf{D}^*\dot{x}\rangle = 0$$

7.2.5 Lorentzkraft und Maxwellgleichungen

Wir betrachten für ein Teilchen eine allgemeine quadratische Lagrangefunktion in y

$$L(x,y) = \frac{1}{2}m\|y\|^2 + \frac{q}{c}\big[A(x,t), y\big] - q\varphi(x,t)$$

Hier ist $[\cdot,\cdot]$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$, $\varphi(x,t)$ und $A(x,t)$ geeignete Funktionen (Skalar bzw. Vektor) und q und c geeigenete Konstanten.
Es stellt sich heraus, daß die Bewegungsgleichung für diesen Lagrangian

$$m\ddot{x}(t) = \frac{q}{c}\,\dot{x}(t) \times B + qE$$

ist, wobei $\times$ das Vektorprodukt ist und sich die beiden Vektorfunktionen B und E aus A und φ über die Beziehungen

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A \\ E &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\partial_t A(x,t) \end{aligned}$$

bestimmen. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Newtonschen Gleichung heißt Lorentzkraft, wobei q die Elementarladung und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.
Weiter stellt sich heraus, daß sich die beiden formal eingeführten Vektorfunktionen B und E als Magnet- bzw. elektrisches Feld interpretieren lassen und die Gleichungen

$$\nabla \times E + \frac{1}{c}\partial_t B = 0 \ , \quad \nabla \cdot B = 0$$

erfüllen – die Maxwellgleichungen im Vakuum.
Die Größen A und φ bestimmen nicht eindeutig elektrisches und Magnetfeld. Es sei $\Lambda(x,t)$ eine beliebige skalare Funktion, dann liefern die transformierten Größen

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\partial_t \Lambda(x,t) \ , \quad A' = A + \nabla\Lambda(x,t) \ , \quad L' = L + \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\Lambda(x,t)$$

dieselben Bewegungsgleichungen. Die angegebenen Transformationen werden **Eichtransformationen** genannt.

7.2.6 Zwangskräfte

Das vorgestellt Konzept ist gut geeignet abgeschlossene Systeme mit wohl definierten Kräften zu beschreiben. Häufig wirken aber Kräfte, die schlecht oder gar nicht spezifiziert werden können und sich dadurch auswirken, daß sie die Bewegungsmöglichkeiten des Systems einschränken. Das ist z.B. beim Pendel, der an einem Faden mit gegebener Länge und an einem festen Punkt angebracht ist. Das Massestück am Faden kann sich dann nur auf der durch den Faden (Radius) und Aufhängpunkt (Mittelpunkt) gegebenen Halbkugel bewegen.
Solche Einschränkungen werden **holonome Zwangskräfte** oder **holonome Zwangsbedingungen** genannt. Sie lassen sich durch eine Menge skalarer Funktionen $G_i : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $i = 1, ..., k$ und $G_i(x) = 0$ beschreiben. Solche Situationen lassen sich nur näherungsweise vollständig beschreiben. Daß etwa der Pendel kein abgeschlossenes System ist, sieht man daran, daß der Energieerhaltungssatz zwar gilt, der Impulserhaltungssatz aber verletzt ist. Das wird deutlich, wenn man das Pendel auf einen Wagen setzt, der beim Pendeln vor- und rückwärts gerichtete Bewegungen macht, die gerade der beim starren Pendel verlustig gegangenen Impulsdifferenz entsprechen.

Eine Zwangsbedingung kann auch eine Einschränkung an die Bewegungsrichtungen eines Systems sein, ohne daß die Konfigurationen selbst eingeschränkt werden. Ein typisches Beispiel dafür ist eine rollende Kugel auf einer Tischplatte. Jede Bewegung, die die Kugel auf dem Tisch ausführt, bedingt eine gleichzeitige Drehung. Solche Einschränkungen werden **anholonome Zwangsbedingungen** genannt. Das sind letzlich Reibungskräfte.
Daß das Vorhandensein von Reibung – auch wenn sie in der Bewegungsgleichung explizit berücksichtig wird – keine vollständige Beschreibung sein kann, sieht man am Beispiel des plastischen Stoßes, bei dem eine Masse etwa auf eine Knetekugel trifft, steckenbleibt und sich beide gemeinsam weiterbewegen. Hierbei ist der Impulserhaltungssatz erfüllt, aber der Energieerhaltungssatz verletzt.

Es ist klar, daß man stets versuchen sollte, ein Problem möglichst vollständig zubeschreiben. Andererseits ist auch klar, daß eine exakte und vollständige Beschreibung von Reibung sehr viele Freiheitsgrade erfordert, wofür sich unter Umständen die Gleichungen vielleicht aufschreiben, aber weder explizit noch numerisch lösen lassen.

Für holonome Zwangsbedingungen, gegeben durch die Funktionen $G_i(x) = 0$ mit $i = 1, ..., k$ gibt es im Prinzip die Möglichkeit, die Zwangsbedingungen aufzulösen und damit das Problem in einem Konfigurationsraum mit $n - k$ Freiheitsgraden zu betrachten. Die Zwangsbedingungen besagen, daß sich das physikalische System nur auf den Teilen des Konfigurationsraumes aufhalten darf, die durch die Gleichungen $G_i(x) = 0$ bestimmt sind. Wenn das so ist, dann kann man das System auch gleich auf dieser eingeschränkten Menge betrachten. Die neuen Freiheitsgrade werden generalisierte Koordinaten genannt. Es stellt sich heraus, daß die neue Euler-Lagrange-Gleichung dieselbe Struktur hat wie die alte.
Dieser Zugang ist oft sinnvoll und wird deshalb typischerweise beim realen Lösen von mechanischen Aufgaben gemacht. Im allgemeinen ist dieser neue Konfigurationsraum kein linearer Raum mehr (wie beim Pendel eine Halbkugel).

Aus theoretischer Sicht ist es konsequenter, die Lagrangemethode zu verwenden. Genau das hat Lagrange ursprünglich gemacht. Solche Aufgaben waren der Startpunkt für die Entwicklung der Lagrangemethode.
Grob gesagt, war Lagranges Gedankengang etwa folgender: Wir nehmen an, daß die durch $G_i(x) = 0$ gegebenen Zwangsbedingungen Kräfte sind, die durch ein Potential gegebenen sind, daß außerhalb der Menge $\{x|G_i(x) = 0\}$ schnell anwächst und deshalb das System zwingt, sich auf diesen Mengen aufzuhalten, da es die steilen Potentialbarieeren nicht überwinden kann. Dieses Potential sei

$$V(x) = \frac{1}{2}\sum_{ij} g_{ij}G_i(x)G_j(x)$$

mit einer positiven (und damit symmetrischen) Matrix (g_{ij}), deren Eigenwerte im Grenzfall gegen ∞ gehen sollen. Die Zwangskräfte sind dann

$$V'(x) = \sum_{ij} g_{ij}G_i(x)G_j'(x) = \sum_j \left(\sum_i g_{ij}G_i(x)\right) G_j'(x) = \sum_j \lambda G_j'(x)$$

Im Grenzfall, falls das Spektrum der Matrix (g_{ij}) gegen unendlich geht: $\sigma(g_{ij}) \longrightarrow \infty$ sind die Zwangskräfte unbestimmt und eine Linearkombination der Funktionale $G_j'(x) \in \mathcal{X}^*$. Genau diese Kräfte treten auf, wenn man anstelle des ursprünglichen Lagrangians L den neue Lagrangian $\tilde{L} = L - \sum_j \lambda G_j(x)$ betrachtet. Diue Lösung des entstandenen bedingten Extremalproblems ermittelt auch die Lagrangemultiplikatoren λ_j und damit automatisch auch die Größe der Zwangskräfte, die explizit von der Zeit abhängen.

7.2.7 Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Es stellt sich heraus, daß die Lagrangegleichung (53) auch die Eulergleichung eines speziellen Funktional ist, nämlich des sogenannten Wirkungsfunktionals. Daher liegt es nahe, anstelle der Newtonschen Gleichung ein neues Prinzip, das Prinzip der kleinsten Wirkung zu postulieren.

Postulat: Es sei $x(t) \subset \mathcal{X}$ die Trajektorie eines physikalischen Systems im Zeitintervall $t \in [a, b]$. Es sei $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$. Dann gibt es eine Lagrangefunktion (Sattelfunktion) $L(x, y)$ derart, daß das Funktional

$$S[x] = \int_a^b L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\,dt$$

für $x(t)$ sein Minimum annimmt.
Diese Funktional wird **Wirkungsintegral** oder **Wirkung** (auf englisch: action) genannt und das Variantionsprinzip das sich hinter diesem Postulat verbirgt heißt **Prinzip der kleinsten Wirkung** (PkW).

Ausgehend von diesem Prinzip, wissen wir aus der Variationsrechnung, daß wenn das Wirkungsfunktional auf der Trajektorie $x(t)$ einen extremalen Wert annimmt, die Eulergleichung

$$\frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L(x, \dot{x}) - \partial_x L(x, \dot{x}) = 0$$

erfüllt ist. Das ist gerade die Lagrangegleichung, weshalb diese Gleichung häufig Euler-Lagrange-Gleichung genannt wird.
Anstelle der intuitiven Newtonschen Gleichung wird ein neues Prinzip postuliert, was auf den ersten Blick völlig aus der Luft gegriffen ist. Nur die Äquivalenz beider Beschreibungen mach das Ganze vernünftig.
Eine ähnliche Situation hatten wir bereits in der Statik. Anstelle des intuitiven Postulats: *In einem stationären Zustand heben sich die Kräfte auf.* haben wir das nicht intuitive Postulat: *Ein stationäre Zustand minimiert die potentielle Energie.* betrachtet.
Ein durch eine Lagrangefunktion gegebenes dynamisches Problems könnte man also auf zwei Weisen lösen, indem man die Lagrangegleichung löst oder das Minimum des Wirkungsfunktionals berechnet.
Zwischen beiden Wegen besteht ein prinzipieller Unterschied. Die Lösung der Lagrangegleichung ist ein *Anfangswertproblem.* Es müssen zur Lösung Anfangswerte $x(a) = x_a$, $\dot{x}(a) = v_a$ gegeben sein. Als Lösung erhalten wir eine Trajektorie, die zum Zeitpunkt a mit diesen Anfangswerten beginnt und beliebig weit in die Zukunft reicht. Normalerweise existiert stets eine eindeutige Lösung.
Die Berechnung des Minimum des Wirkungsfunktionals ist dagegen ein *Randwertproblem.* Es müssen zur Lösung Randwerte $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$ gegeben sein. Typischerweise existiert für so ein Problem nur unter strengen Zusatzbedingungen wie hinreichende Nähe der beiden Zeitpunkte a und b eine eindeutige Lösung.
Aus diesem Grund (und weil es viel einfacher ist) wird zur Lösung konkreter Aufgaben stets die Lagrangegleichung benutzt.

7.2.8 PkW $\Longrightarrow$ Lagrangegleichung. Nicht umgekehrt!

Als Eulergleichung des Wirkungsfunktionals gilt folgender (physikalischer) Satz:
Die Trajektorie, auf der das Wirkungsfunktionals einen lokalen Extremwert hat, erfüllt die Lagrangegleichung.
Typischerweise ist das Wirkungsfunktional auf der Lösung der Lagrangegleichung sogar minimal. Das gilt aber nicht immer. Grob gesagt gilt es nur für kleine Zeiten. Im allgemeinen kann das Wirkungsfunktional auf der Lösung der Lagrangegleichung gar kein besonderer Punkt sein. Das wird im Zusammenhang mit der Hamilton-Jacobi-Gleichung ausführlicher diskutiert.
Als Konsequenz folgt, daß das PkW nicht als Postulat für den Start der klassischen Mechanik universell geeignet ist – im Gegensatz zur Lagrangegleichung.

7.2.9 Einige Bemerkungen zur Lagrangegleichung

- Wir führen hier einen Auszug aus der *wikipedia* zur Lagrange-Mechanik an, der kurz die wichtigsten Eigenschaften der Zugangs beschreibt:

  Der Formalismus ist (im Gegensatz zu der Newtonschen Mechanik, die a priori nur in Inertialsystemen gilt) auch in beschleunigten Bezugssystemen gültig. Der Lagrange-Formalismus ist invariant gegen Koordinatentransformationen. Aus der Lagrange-Funktion lassen sich die Bewegungsgleichungen mit den Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung bestimmen. Diese Betrachtungsweise vereinfacht viele physikalische Probleme, da sich, im Gegensatz zu der Newtonschen Formulierung der Bewegungsgesetze, im Lagrange-Formalismus Zwangsbedingungen relativ einfach durch das explizite Ausrechnen der Zwangskräfte oder die geeignete Wahl generalisierter Koordinaten berücksichtigen lassen.

- Historisch hat sich das PkW als Prinzip zur Herleitung der Lagrangefunktion erst viel später herausgebildet. Der Grund ist, daß man dem Wirkungsfunktional lange keinen physikalischen Sinn geben konnte. Erst Hamilton kam auf die Idee, die Wirkung als "Wellenfront" eines Teilchens zu betrachten. Das scheint auf den ersten Blick völlig abwegig. Man hat sich erst heute dran gewöhnt, nach dem man den genauso unverständlichen Welle-Teilchen-Dualismus in der Quantenmechanik entwickelt hat. Das ist eine gute Illustration zur Bemerkung von Ernst Mach: *Man führt ungewöhnliche Unverständlichkeiten auf gewöhnliche Unverständlichkeiten zurück.*

  Die historische Logik war etwa folgende:

  - Newton entwickelt das Kraftkonzept und seine Gleichung
  - Es werden verschiedene spezielle Aufgaben, in verschiedenen – auch krumlinigen – Koordinatensystemen mit Newtons Gleichung gerechnet. Man stellt fest, daß alle Gleichungen dieselbe Struktur haben, nämlich $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(\dot{x}(t), x(t)) - L_x(\dot{x}(t), x(t)) = 0$ (die Lagrangegleichung) mit einer gewissen Funktion L. Diese Gleichung wird genau wie Newtons Gleichung als Anfangswertaufgabe betrachtet und gelöst.
  - Es gibt Regeln, wie man die Funktion L finden kann, etwa als $L = T - U$. Nach wie vor beherrscht das Kraftkonzept (auch bei Lagrange) die Denkweise.
  - Euler leitet – unabhängig von der Entwicklung in der Mechanik – die Eulergleichung aus einer Extremalaufgabe ab.
  - Man stellt fest, daß man die Lagrangegleichung die Eulergleichung für ein gewissens Funktional – das Wirkungsfunktional – ist.

  - Hamilton postuliert als neues Naturgesetz das Minimum des Wirkungsfunktionals.
  - Hamilton erkennt im Wirkungsfunktional die Wellenbeschreibung der Mechanik.
  - Hamilton untersucht den Zusammenhang zwischen Anfangswertaufgabe und zeitlicher Randwertaufgabe fürs Wirkungsfunktional. Erst Hamilton nimmt das Prinzip der kleinsten Wirkung ernst.
  - Man stellt fest, daß die Lagrangegleichung zwar richtig ist, auf der Lösung das Wirkungsfunktional im allgemeinen aber nur für kleine Zeiten extremal ist.

- Die geometrische Optik kann gewisse Effekte, z.B. die Lichtbeugung) nicht beschreiben. Dazu muß man die Wellenoptik, insbes. das Huygensche Prinzip verwenden.
- Interferenz von Wasserwellen beschreibt das Huygensche Prinzip auch sehr gut. Interferenz ist hier einfach die Superposition der Auslenkung.
- Interferenz von Licht beschreibt auch das Huygensche Prinzip dagegen nicht, wenn man als Wellenfront die reelle Intensität betrachtet. Sie ist konstant, im Gegenteil zur Wasserwelle. Erst die komplexe Superposition von zwei Anteilen beschreibt die Interferenz von Licht.
- Die Beschreibung der Interferenz von Teilchenstrahlen durch komplexe Superposition führt zur Quantenmechanik.
- Wir haben von Anfang an vorausgesetzt, daß L nicht explizit von der Zeit abhängt. So eine Abhängigkeit kann problemlos berücksichtigt werden, was in den meisten Mechanik-Lehrbüchern auch erfolgt.
- Mit Lagrangefunktionen, die nicht explizit von der Zeit abhängen, können nur Probleme mit Energieerhaltung beschrieben werden. Insbesondere kann man keine Reibungskräfte aus solchen Lagrangefunktionen herleiten.
- Grob gesagt, ist es mit Lagrangefunktionen, die nicht explizit von der Zeit abhängen, nur möglich, fundamentale Kräfte zu beschreiben.
- Historisch hat man (Galilei) als erstes versucht, die Bewegung bei konstanter Kraft, der Schwerkraft, zu beschreiben. Das führte zu der Erkenntnis, daß die Geschwindigkeitsänderung proportional zum Zeitintervall ist. Das wiederum führte auf das Gesetz der quadratischen Abhängigkeit des zurückgelegten Weges von der Zeit. Oder mit anderen Worten: Bei konstanter Kraft ist die zweite Zeitableitung proportional zur Kraft (Newtons 2. Gesetz). Ist die Kraft nun nicht konstant, ändert sich in kleinen Zeitintervallen aber nur geringfügig, so kann man in jedem kleinen Zeitintervall eine konstante Kraft ansetzen und erhält wieder Newtons 2. Gesetz. Sich räumlich oder zeitlich stark ändernde Kräfte lassen sich so nicht beschreiben.
- Als Theorie, die auf dem Kraftkonzept aufbaut, kann man mit dem Lagrangeformalismus nur Probleme mit wohl definierter und sich zeitlich nur schwach ändernder Kraft beschreiben. Insbesondere lassen sich keine Kraftstöße, wie sie z.B. beim Billiardspiel vorkommen, beschreiben (siehe nächster Punkt).

7.3 Hamilton-Mechanik

Die Lagrangegleichung ist das Mittel zur Wahl zum Lösen allgemeiner mechanischer Aufgaben, wobei es unerheblich ist, welches konkrete Problem und unter Benutzung welcher Koordinatensysteme man betrachtet.
Startpunkt ist stets eine Lagrangefunktion, die normalerweise als Differenz aus kinetischer und potentieller Energie angesetzt wird. Wie wir gesehen haben, beschreibt die Lagrangegleichung nur dann die Erhaltung der Gesamtenergie (Summe aus kinetischer und potentieller Energie), wenn die kinetische Energie quadratisch von der Geschwindigkeit abhängt.
Der Grund dafür ist nicht eine eingeschränkte Gültigkkeit des Formalismus der Lagrange-Mechanik sondern die fehlerhafte Annahme, daß die richtige Lagragefunktion zu einem physikalischen Problem die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie sei. Damit bleibt das Problem, wie man zu einem gegebenen physikalischen Problem die entsprechende Lagragefunktion konstruieren kann. Wäre das eine gut meßbare extensive Größe – etwa die Gesamtenergie –, so könnte man sie durch Addition aller relevanter Anteile bestimmen.
Eine Methode hierzu ist der Übergang zur Hamilton-Mechanik. Das ist auf den ersten Blick eine formale Umformulierung der Lagrange-Mechanik, führt aber zu weitreichenden Folgerungen, die u.a. einen strengen Übergang zur statistischen Physik und Quantenmechanik ermöglichen.
Des weiteren geht die Hamilton-Mechanik davon aus, daß die beiden unabhängigen freien Parameter Ort (intensive Größe) und Impuls (extensive Größe) sind. Das wird erreicht, indem von der Geschwindigkeit $\dot{x}$ durch Legendretransformation zu p übergegangen wird. Die Abhängigkeit von $\dot{x}(t)$ und $x(t)$ gibt es dann auch formal nicht mehr.

7.3.1 Übergang zum Hamilton-Formalismus

Wie immer führt der Versuch, eine Herleitung in der Physik mathematisch streng zu begründen, eine Menge implizit verwendeter Annahme zu Tage. Wir versuchen als erstes diese Herleitung mathematisch streng durchzuführen und werden danach sehen, daß man zu gleichen Ergebnis kommt, wenn man rein formal vorgeht.
Bei der Analogie zwischen Newton-Mechanik und Lagrange-Mechanik haben wir gesehen, daß sich die zweite Ableitung der kinetischen Energie als Masse interpretieren läßt. Da in allen bekannten physikalischen Systemen die Masse positiv ist, sollte $\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2} T > 0$ oder $\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2} L > 0$ gelten, die Lagrangefunktion $L(x, y)$ als Funktion von y also konvex sein.
Dann ist es sinnvoll, die Legendretransformation der Lagrangefunktion bezüglich $y \in \mathcal{Y}$ zu betrachten:

$$H(x, p) = \sup_y \Big(\langle y, p \rangle - L(x, y) \Big), \ p \in \mathcal{Y}^*$$

Wir untersuchen, welche Eigenschaften diese Funktion $H(x, p)$ (die im Weiteren **Hamiltonfunktion** oder **Hamiltonian** genannt wird) hat. Dazu nehmen wir ausreichende Glattheit an und berechnen die Legendretransformation unter Benutzung von Ableitungen. D.h., wir nehmen an, daß der Punkt y_0, bei dem das Supremum in der Legendretransformation angenommen wird Lösung der Gleichung

$$p = \partial_y L(x, y)\big|_{y=y_0}$$

ist. Diese Lösung sei $y_0 = G(x, p)$. Die Abbildung $p \longrightarrow y_0$ ist eineindeutig, wenn $\partial_y L(x, y)$ monoton also $L(x, \cdot)$ konvex ist. Das wollen wir im weiteren voraussetzen. Die inverse Abbildung

bezeichnen wir mit $p = G^{-1}(x, y_0)$. Es ist $G^{-1}(x, y_0) = \partial_y L(x, y)\big|_{y=y_0}$. Damit erhalten wir

$$H(x,p) = \big\langle G(x,p), p\big\rangle - L\big(x, G(x,p)\big)$$

Wir werden im weiteren Ableitungen von H bezüglich x und p berechnen und aus diesem Grund ein paar Formeln zusammentragen. Alle Ableitungen mit dem Symbol ∂_x seien partielle Gateauxableitungen. Es gilt

$$\begin{aligned} L &: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \\ \partial_x L(x,y) &\in \mathcal{X}^* \\ \partial_y L(x,y) &\in \mathcal{Y}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &: \mathcal{X} \times \mathcal{Y}^* \to \mathcal{Y} \\ G(\cdot, p) &: \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \\ G(x, \cdot) &: \mathcal{Y}^* \to \mathcal{Y} \\ \partial_x G(x,p) &: \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \\ \partial_p G(x,p) &: \mathcal{Y}^* \to \mathcal{Y} \end{aligned}$$

Die vorletzte Zeile bedeutet, daß $\partial_x G(x,p)$ für festes x und p ein linearer Operator $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. Analog die letzte Zeile.
Des weiteren benutzen wir eine Formel für die Ableitung der Komposition $f(g(x))$ mit $f : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Es ist $f \circ g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ und damit $\partial_x(f \circ g) \in \mathcal{X}^*$. $\partial_x f(g(x)) = \big[g'(x)\big]^* \big[f'(g(x))\big]$. Dieser Ausdruck ist so zu verstehen: $g(x)$ ist für festes x aus $\mathcal{Y}$. $f'(g(x))$ ist die Ableitung von f, genommen an der Stelle $g(x)$. Das ist ein Element aus $\mathcal{X}^*$. Auf dieses Funktional wirkt der Operator $\big[g'(x)\big]^*$. Für festes x ist $g'(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ein linearer Operator und $\big[g'(x)\big]^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ sein adjungierter.
Damit erhalten wir (unter Benutzung von $p = \partial_y L\big(x, G(x,p)\big)$)

$$\begin{aligned} \partial_x H(x,p) &= \big(\partial_x G(x,p)\big)^* p - \partial_x L\big(x, G(x,p)\big) - \big(\partial_x G(x,p)\big)^* \partial_y L\big(x, G(x,p)\big) = \\ &= -\partial_x L\big(x, G(x,p)\big) \\ \partial_p H(x,p) &= \big(\partial_p G(x,p)\big)^* p + G(x,p) - \big(\partial_p G(x,p)\big)^* \partial_y L\big(x, G(x,p)\big) = \\ &= G(x,p) \end{aligned}$$

(Hier haben wir angenommen, daß Ableitungen, die eigentlich in den bidualen Räumen liegen, so regulär sind, daß sie in den predualen Räumen liegen)
Damit erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_x H(x,p) &= -\partial_x L\big(x, G(x,p)\big) = -\partial_x L\big(x, y_0\big) \\ \partial_p H(x,p) &= G(x,p) = y_0 \end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt an, daß wir ein physikalisches System mit einer Trajektorie $x(t)$ und Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ vor uns haben, die die Lagrangegleichung mit der Lagrangefunktion L erfüllt. Wir setzen $\mathcal{Y} := \mathcal{X}$. Wir betrachten eine Schar $p(t)$ und das zugehörige Supremum $y_0(t)$, wobei wir auch anstelle des festen Parameters x die Schar $x(t)$ einsetzen. Die Abbildung zwischen beiden ist eineindeutig. Wir wählen eine spezielle Schar $p(t)$ derart, daß $y_0(t) = \dot{x}(t)$. Anders ausgedrückt: Wir nehmen an, daß wir alle Werte aus $\dot{x}(t)$ in G^{-1} einsetzen können und setzen $p(t) := G^{-1}\big(x(t), \dot{x}(t)\big)$.

$$p(t) := G^{-1}\big(x(t), \dot{x}(t)\big) = \partial_y L(x,y)\Big|_{y=\dot{x}(t)}$$

Diese Größe wird verallgemeinerter Impuls genannt, weil sie im Falle des freien Teilchens mit dem Impuls übereinstimmt (wie sich gleich zeigen wird). Ins Gleichungssystem eingesetzt ergibt das

$$\begin{aligned} \partial_x H(x,p) &= -\partial_x L\big(x,\dot{x}\big) \\ \partial_p H(x,p) &= \dot{x} \end{aligned}$$

$x(t)$ soll die Lagrangegleichung erfüllen, d.h., es ist

$$\partial_x L\big(x,\dot{x}\big) = \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L\big(x,\dot{x}\big) = \frac{d}{dt}\left(\partial_y L(x,y)\Big|_{y=\dot{x}(t)}\right) = \frac{d}{dt}p(t) = \dot{p}(t)$$

und damit erhalten wir abschließend das System

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\partial_x H(x,p) \\ \dot{x} &= \partial_p H(x,p) \end{aligned}$$

Das ist ein dynamisches System – genannt **Hamiltonsystem** –, das sich bei gegebener Funktion $H(p,x)$ und Anfangswerten $x(0)$ und $p(0)$ (möglicherweise) lösen läßt. Die erste Gleichung ist eine Gleichung in $\mathcal{X}^*$ und entspricht der Newtonschen Gleichung, die zweite Gleichung ist eine in $\mathcal{X}$ und ist die Definition der Geschwindigkeit als Funktion des Impulses. Die Lösung ist eine Trajektorie $\big(x(t),p(t)\big) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$.
Hamiltonsystem und Lagrangegleichung sind äquivalent in folgendem Sinn: Ist $\big(x(t),p(t)\big)$ Lösung des Hamiltonsystems, dann ist die erste Komponente $x(t)$ Lösung der Lagrangegleichung. Umgekehrt, ist $x(t)$ Lösung der Lagrangegleichung, dann ist das Paar $\left(x(t), \partial_y L(x,y)\big|_{y=\dot{x}(t)}\right)$ Lösung des Hamiltonsystems.

Bemerkung (zum Übergang von $\dot{x}$ zu p)
Wir betrachten $G(x,p) = y_0$ als eineindeutigen funktionellen Zusammenhang zwischen p und y_0, d.h., $p = G^{-1}(x,y_0) = \partial_y L(x,y)\big|_{y=y_0}$ ist wohl definiert. Eigentlich hängt y_0 von x ab. Wir nehmen an, daß es eineindeutige Zusammenhang für jedes x existiert.
Dann setzen wir $x = x(t)$, $y_0 = \dot{x}(t)$. Das ergibt $p(t)$.
Der Übergang von Lagrange zu Hamilton klappt also nur, wenn x in der Beziehung $p = G^{-1}(x,y_0)$ ein Paramter bleibt, der die Variabilität von y_0 nicht beeinträchtigt. Das erklärt auch, warum man danach x und p als unabhängige Parameter ansehen kann.
Beispiel: $L(x,y) = \frac{1}{2}f(x)y^2$. Das ergibt $p = f(x)y_0$. Hier kann man $p(t) = f(x(t))\dot{x}(t)$ setzen.
Man spart sich die doppelte Invertierung, wenn man von Anfang an $p = \partial_y L(x,y)$ postuliert. So wird es meistens in Physiklehrbüchern gemacht.

7.3.2 Formale Herleitung des Hamiltonsystems

Man kann sich das Hamiltonsystem formal herleiten. Das ist einerseits zum Merken gut geeignet. Andererseits ist die erstaunliche Tatsache, daß diese "formale Herleitung" zum richtigen Ergebnis führt eine weitere Erklärung dafür, daß Impuls und Geschwindigkeit eigentlich unabhängige Variablen sind, was die Anwendbarkeit der "exakten Herleitung" noch mal verdeutlicht.
Wir starten mit einer Lagrangefunktion $L(x,y)$. Aus der Definition von

$$H(x,p) = \sup_y(\langle y,p\rangle - L(x,y))$$

erhalten wir für die Stelle, an der das Supremum angenommen wird

$$p = \partial_y L \quad \Longrightarrow \quad y = \partial_p H$$

An dieser Stelle gilt

$$H(x,p) = \langle y, p\rangle - L(x,y)$$

Hier ist x nur ein freier Parameter, wir können differenzieren:

$$\partial_x H = -\partial_x L$$

Damit erhalten wir das System

$$\begin{aligned} \partial_x H(x,p) &= -\partial_x L(x,y) \\ \partial_p H(x,p) &= y \end{aligned}$$

Bis jetzt ist alles exakt. Dieses System, das eigentlich als Identität

$$\partial_x H(x,p) = -\partial_x L(x, \partial_p H(x,p))$$

oder

$$-\partial_x L(x,y) = \partial_x H(x, \partial_y L(x,y))$$

zu verstehen ist, ist eine triviale Folge aus der konvexen Analysis und hat nichts mit irgendeiner Bewegung zu tun. Bewegung kommt ins Spiel durch folgende Postulate:

- Wir betrachten zeitabhängige Größen, als Trajektorien $x(t), y(t), p(t)$.
- **Postulat 1:** Es sei $y(t) = \dot{x}(t)$. Daraus folgt $p(t) = \partial_y L(x,y)\Big|_{x=x(t), y=\dot{x}(t)}$. Das schreiben wir formal als $p(t) = \partial_{\dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t))$.
- **Postulat 2:** Es gelte die Lagrangegleichung, $\dot{p}(t) = \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t)) = \partial_x L(x(t), \dot{x}(t))$.
  Exakt ist die Lagrangegleichung folgendermaßen zu verstehen: Es sei $b(t) := \partial_x L(x,y)\Big|_{x=x(t), y=\dot{x}(t)}$. Dann ist $\dot{p}(t) = b(t)$.

Bemerkung: Das sind die Grundpostulate der analytischen Geometrie.
Mit diesen Postulaten folgt aus dem obigen System das System

$$\begin{aligned} \partial_x H(x,p) &= -\dot{p} \\ \partial_p H(x,p) &= \dot{x} \end{aligned}$$

7.3.3 Zusammenhang von Lagrange- und Hamiltongleichung

Beide Gleichungen sind Anfangswertprobleme (AWP). Die Lagrangegleichung wird zusammen mit den Anfangswerten $x_0 = x(0)$ und $v_0 = \dot{x}(0)$ gelöst. Die Lösung ist *eine* Trajektorie $x_L(t; x_0, v_0)$.
Das Hamiltonsystem wird mit den Anfangswerten $x_0 = x(0)$ und $p_0 = p(0)$ gelöst. Die Lösung sind *zwei* Trajektorien $x_H(t; x_0, p_0)$ und $p_H(t; x_0, p_0)$. Um die eine Lösung auf die andere anzubilden, müssen Impuls und Geschwindigkeit ineinander umgerechnet werden.

Es ist $p_0 = \partial_y L(x,y)\Big|_{y=\dot{x}}\Big|_{t=0}$, also $p_0(x_0,v_0) = \partial_{v_0} L(x_0,v_0)$ (wobei diese Geichung bei unbekanntem L durch Invertierung von $v = \partial_p H$ bestimmt werden muß). Damit erhalten wir

$$x_L(t;x_0,v_0) = x_H(t;x_0,p_0(x_0,v_0))$$

Umgekehrt, bei gegebener Lösung der Lagrangegleichung, bestimmen wir analog $v_0 = v_0(x_0,p_0)$ aus $p_0(x_0,v_0) = \partial_{v_0} L(x_0,v_0)$. und erhalten $x_H(t;x_0,p_0) = x_L(t;x_0,v_0(x_0,p_0))$. Jetzt berechnen wir die Geschwindigkeit $y(t) = \frac{d}{dt} x_L(t;x_0,v_0)$ und setzen v_0 ein. Das ergibt $y(t) = y(t;x_0,p_0)$. Damit erhalten wir $p_H(t;x_0,p_0) = \partial_y L(x,y)\Big|_{x=x_H(t;x_0,p_0),y=y(t;x_0,p_0)}$.

7.3.4 Der Energieerhaltungssatz

Die Hamiltonfunktion ist eine Größe, die zeitlich erhalten bleibt. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H\big(x(t),p(t)\big) &= \big\langle \dot{x}(t), \partial_x H(x,p)\big\rangle + \big\langle \partial_p H(x,p), \dot{p}(t)\big\rangle = \\ &= \big\langle \partial_p H(x,p), \partial_x H(x,p)\big\rangle - \big\langle \partial_p H(x,p), \partial_x H(x,p)\big\rangle = 0\end{aligned}$$

Der Energieerhaltungssatz gilt damit für beliebige Hamiltonfunktionen. Eine Voraussetzung an die kinetische Energie (die es hier separiert gar nicht gibt) ist nicht nötig. Damit können wir die Frage beantworten, was denn die kinetische Energie tatsächlich ist.

7.3.5 Der spezielle Fall einer separierten Lagrangefunktion

Wir betrachten des speziellen Fall

$$L(x,y) = T(y) - U(x)$$

Die Lagrangegleichung hierfür war

$$T'(\dot{x})\ddot{x} = -U'(x)$$

und konnte als Newtonsche Gleichung interpretiert werden.
Für den Impuls erhalten wir

$$p(t) = \partial_y L(x,y)\Big|_{y=\dot{x}(t)} = T'(\dot{x}(t))$$

Im Falle eines freien Teilchens ist $T(y) = \frac{m}{2}y^2$, $T'(y) = my$ und damit $p = m\dot{x}$, der klassische Impuls.
Die Hamiltonfunktion ist

$$H(x,p) = \sup_y \Big(\langle y,p\rangle - T(y) + U(x)\Big) = T^*(p) + U(x)$$

Hier ist T^* die konvex konjugierte von $T(y)$.
Als Hamiltonsystem erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\partial_x H(x,p) = -U'(x) \\ \dot{x} &= \partial_p H(x,p) = \big(T^*(p)\big)'\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist die ursprüngliche Newtonsche Gleichung, die zweite Gleichung ist die Umkehrung von $p = T'(\dot{x})$, der Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit ($T'(y)$ und $\big(T^*(p)\big)'$ sind als Ableitung konjugiert konvexer Funktionen zueinander invers).
Damit ist klar, daß im allgemeinen $T^*(p)$ und nicht $T(\dot{x})$ als kinetische Energie zu interpretieren ist. Gleichgültig ist es nur, wenn $T^*(p) \sim T(\dot{x})$ gilt, was gerade im quadratischen Fall erfüllt ist.

7.4 Dissipative Hamiltonsysteme

Die Beschreibung realer Systeme muß Reibung berücksichtigen. Reibung läßt sich nicht als Potential schreiben oder anderweitig konsistent in den Hamiltonformalismus einbauen. Deshalb wird einfach ein Reibungsterm in die Gleichung für $\dot{p}$ dazuaddiert. Dann ist das System kein Hamiltonsystem mehr (keine simplektische Struktur, kein Energieerhaltungssatz), wird aber weiterhin so bezeichnet. Tatsächlich wird einfach eine weitere Kraft in die Newtonsche Gleichung eingeführt. Vom Hamiltonformalismus werden aber die Zustandsvariablen x und p übernommen. Außerdem hilft er, die Zusammenhänge der Größen zu verstehen.
Reibung ist ein typischer Effekt eines offenen Systems. Es wird durch einen Reibungterm versucht, die Wirkung die das System auf die Außenwelt (die nicht mit beschrieben werden soll) hat, zu berücksichtigen. Außerdem hat die Außenwelt Einfluß auf das System. Die Newtonsche Gleichung sollte unterberücksichtigung dieser Effekte also etwa so aussehen:

$$\dot{p} = F_a + F_i + F_r + F_s$$

Hier ist

- F_a eine äußere gegebene Kraft, eigentlich eine Eigenschaft des Raumes, wie z.B. die Gravitationskraft bei einem Einteilchenproblem.
- $F_i = -\nabla_x U(x)$ die Kraft, die die Teile des Systems aufeinder selbst ausüben, wie z.B. die Gravitationskraft bei einem Vielteilchenproblem.
- F_r die Reibung, also Kräfte, die das System auf das Medium, in dem es sich befindet, ausübt.
- F_s sind die Kräfte, die das Medium auf das System ausübt, z.B. thermische Stöße.

Die Kraft F_a wird nicht explizt berücksichtigt (mit F_i zusammengefaßt). Die Kraft F_s ist eine Zufallskraft und führt nicht deterministische Gleichungen (z.B. FPE), die als einfacher Diffusionsterm berücksichtigt wird.

7.4.1 Elastische Reibungskräfte

Im weiteren ist nur die prinzipielle Form von Reibungkräften von Interesse. Wir nehmen an, daß durch einen elastischen Stoß Energie und Impuls an das Medium abgegeben wird. Das führt zu Kräften, die proportional zur Geschwindigkeit sind. Solche Kräfte heißen im skalaren Fall Stokessche Reibungskräfte oder Rayleighsche Dissipationskräfte.
Man kann die Form solcher Kräfte aus einem angenommenen Zweikörperstoß herleiten:
Wir betrachten zwei Objekte (der Index 1 gehört zum System, der Index 2 zur Außenwelt) mit den Impulsen p_1 und p_2 vor und p_1' und p_2' nach dem Stoß. Sie haben die kinetischen Energien $T_1^*(p_1)$ bzw. $T_2^*(p_2)$ mit den Ableitungen ψ_1 und ψ_2. Nach Impuls- und Energieerhaltungssatz gilt

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_1' + p_2' \\ T_1^*(p_1) + T_2^*(p_2) &= T_1^*(p_1') + T_2^*(p_2') \end{aligned}$$

Es sei

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1 + \Delta_1 \\ p_2' &= p_2 + \Delta_2 \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\Delta_1 = -\Delta_2 =: \Delta$.
Da in die Newtonsche Gleichung die zeitliche Änderung des Impulses steht, versuchen wir Δ zu bestimmen. Dazu zerlegen wir T_1^* und T_2^* in eine Taylorreihe.

$$\begin{aligned} T_1^*(p_1) - T_1^*(p_1') &= -\Delta\psi_1(p_1) - \frac{1}{2}\Delta^2\psi_1'(p_1) \\ T_2^*(p_2') - T_2^*(p_2) &= \Delta\psi_2(p_2) + \frac{1}{2}\Delta^2\psi_2'(p_2) \end{aligned}$$

Aus der Gleichheit der linken Ausdrücke folgt nach Division durch Δ und nach Ersetzung durch die Massen und Geschwindigkeiten

$$-\psi_1(p_1) - \frac{1}{2}\Delta\psi_1'(p_1) = \psi_2(p_2) + \frac{1}{2}\Delta\psi_2'(p_2)$$

also

$$\Delta = 2\frac{\psi_2(p_2) - \psi_1(p_1)}{\psi_1'(p_1) + \psi_2'(p_2)} = 2\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{x}_1$$

wenn man noch annimmt, daß die Teilchen des Mediums ruhten.
Damit erhalten wir

$$\Delta = -\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\psi_1(p_1)$$

Meistens wird $m_1 \gg m_2$ (unendlich große Masse des Systemteilchens) angenommen, was auf

$$\Delta = -2m_2\psi_1(p_1)$$

führt, also ein Ausdruck, bei dem tatsächlich vom ersten Teilchen nur die Geschwindigkeit eingeht.

Nimmt man für die Impulse $p = m\dot{x}$ an, erhält man die bekannten Ausdrücke

$$\begin{aligned} \dot{x}_1' &= \frac{(m_1 - m_2)\dot{x}_1 + 2m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2} \\ \dot{x}_2' &= \frac{(m_2 - m_1)\dot{x}_2 + 2m_1\dot{x}_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Die übertragenen Energie und Impuls des ersten Teilchens sind

$$\begin{aligned} \Delta(p_1) &= m_1(\dot{x}_1' - \dot{x}_1) = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \Delta(T^*(p_1)) &= \Delta(p_1) \cdot \frac{1}{2}(\dot{x}_1' + \dot{x}_1) = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \cdot \frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{2m_1m_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)}{(m_1 + m_2)^2} \end{aligned}$$

7.4.2 Das allgemeine dissipative Hamiltonsystem

Mit einem Reibungsterm proportional zur Geschwindigkeit, erhält man mit $\psi(p) = \nabla_p T^*(p)$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\nabla_x U(x) - \mathbf{B}\psi(p) \\ \dot{x} &= \psi(p) \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu einer Gleichung zweiter Ordnung. Nach Differentation der zweiten Gleichung nach t erhält man

$$\ddot{x} = \psi'(p)\dot{p} = -\psi'(p)\big(\nabla_x U(x) + \mathbf{B}\psi(p)\big)$$

also

$$T''(\dot{x})\ddot{x} = -\nabla_x U(x) - \mathbf{B}\dot{x} \tag{55}$$

Für die zeitliche Entwicklung der Energie $H(p,x) = T^*(p) + U(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(p,x) &= \langle \dot{p}, \nabla_p T^*(p)\rangle + \langle \dot{x}, \nabla_x U(x)\rangle = \\ &= -\langle \nabla_x U(x), \nabla_p T^*(p)\rangle - \langle \mathbf{B}\psi(p), \nabla_p T^*(p)\rangle + \langle \psi(p), \nabla_x U(x)\rangle = \\ &= -\langle \mathbf{B}\psi(p), \psi(p)\rangle \leq 0 \end{aligned}$$

falls $\mathbf{B} \geq 0$.
Die quadratische Funktion $\langle \mathbf{B}\psi(p), \psi(p)\rangle$ ist gerade die Rayleighsche Dissipationsfunktion.
Der Impulserhaltungssatz ist natürlicherweise nicht erfüllt (bei der Reibung wird Impuls übertragen). Man kann das aber künstlich im Fall $\nabla_x U(x) = 0$ erreichen, indem man Operatoren $\mathbf{B}$ mit $\mathbf{B}^*\mathbb{1} = 0$ betrachtet.

7.4.3 Das reduzierte dissipative Hamiltonsystem

Interessiert man sich nur für den Ort, betrachtet man eine Gleichung der Form $\dot{x} = f(x)$. Das heißt, man nimmt an, daß man die zeitliche Änderung des Ortes direkt beschreiben kann. Es ist klar, daß so keine Schwingungen beschrieben werden können. Man nimmt an, daß die Reibung so stark ist, daß das System, sobald es im Minimum der potentiellen Energie ist, zur Ruhe kommt.
Dazu müssen Annahmen über den Impuls gemacht werden. Die zweckmäßigste Annahme ist, daß sich der Impuls nicht ändert und sogar konstant 0 ist. Dann erhält man aus

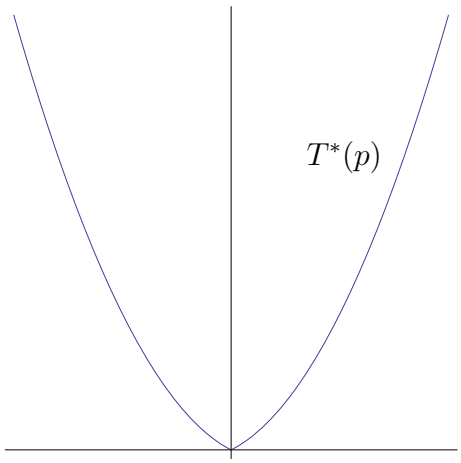
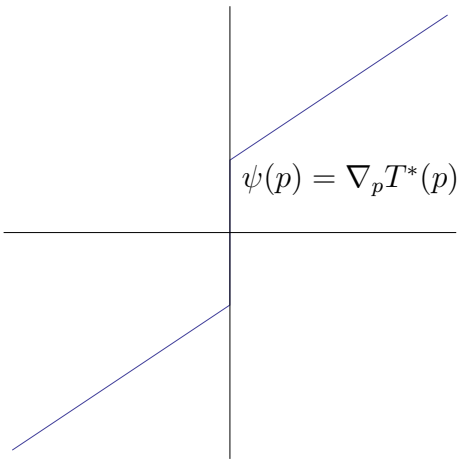
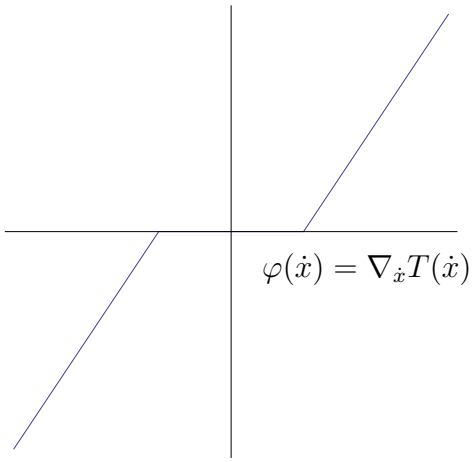
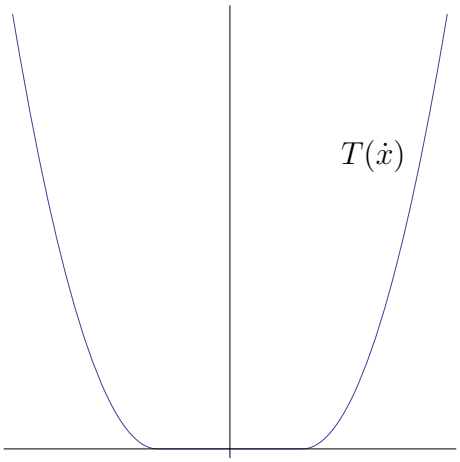
$$\dot{p} = 0 = -\nabla_x U(x) - \mathbf{B}\psi(p) = -\nabla_x U(x) - \mathbf{B}\dot{x}$$

die Gleichung erster Ordnung

$$\dot{x} = -\mathbf{B}^{-1}\nabla U(x) \tag{56}$$

Für diese Gleichung ist die potentialle Energie eine Lyapunovfunktion:

$$\frac{d}{dt}U(x) = \langle \dot{x}, \nabla U(x)\rangle = -\langle \mathbf{B}^{-1}\nabla U(x), \nabla U(x)\rangle$$

Das System bewegt sich in die Minima der potentiellen Energie. Und zwar um so langsamer, je größer die Reibung $\mathbf{B}$ ist.
Vergleicht man das mit (55), sieht man, daß $T''(\dot{x}) = 0$ gelten muß.

Wie kann man sich so ein System vorstellen? Der Impuls soll 0 sein, die Geschwindigkeit aber nicht. Genauer, soll $p = 0$ nicht $\dot{x}$ festlegen. Der Zusammenhang zwischen p und $\dot{x}$ wird von der kinetischen Energie $T^*(p)$ beschrieben. So ein Zusammenhang ist möglich, wenn $T^*(0) = 0$, aber $T^*(p)$ in $p = 0$ nicht differentierbar ist. Das ist beispielsweise für folgende kinetische Energie möglich: