Optimaler Transport und Wasserstein-Gradientenflüsse
Dr. Matthias Liero 28. Januar 2018

Übungsblatt 5

zum 6.2.2018

Aufgabe 1. Die Hellinger-Kakutani-Metrik
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $\mu \in \mathcal{M}_{\geq 0}(\Omega)$ ein gegebenes nicht-negatives, endliches Borel-Maß. Auf $L^2(\Omega;\mu)$ betrachte das Funktional

$$H(w;\mu) := \int_\Omega w(x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Zeige, dass durch die dynamische Formulierung

$$\mathsf{d}_H(\mu_0,\mu_1)^2 = \min\Big\{ \int_0^1 H(w_s;\mu_s)\,\mathrm{d}s \,\Big|\, \mu_{s=0}=\mu_0,\ \mu_{s=1}=\mu_1 \ \text{ und } \frac{\mathrm{d}\mu_s}{\mathrm{d}s} = w_s\mu_s \Big\}$$

eine Metrik d_H auf $\mathcal{M}_{\geq 0}(\Omega)$ gegeben ist. Berechne dazu die Lösung des Minimierungsproblems explizit (Benutze den Ansatz $\mathrm{d}\mu_s(x) = f_s(x)\,\mathrm{d}(\mu_0{+}\mu_1)$ für eine nicht-negative Dichte $f_s : \Omega \to [0,\infty[$). Wie sehen die Geodäten aus?

Aufgabe 2. Gradientflüsse für λ-konvexe Funktionen
Sei $E \in C^1(\mathbb{R}^n)$ eine gegebene Energie, so dass $u \mapsto E(u) - (\lambda/2)\|u\|^2$ konvex ist für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $t \mapsto u_t$ eine Lösung von $\dot{u}_t = -\nabla E(u_t)$ ist, genau dann wenn u die Evolutionäre Variationelle Ungleichung (EVU)

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n : \quad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t - v\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|u_t - v\|^2 + E(u_t) \leq E(v)$$

löst.