Optimaler Transport und Wasserstein-Gradientenflüsse
Dr. Matthias Liero 8. Januar 2018

Übungsblatt 4

zum 22.1.2017

Aufgabe 1. Glättung von Maßen
Seien $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, und $\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Definiere $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(x/\varepsilon)$. Die Glättung von μ ist durch $\mu_\varepsilon(x) = (\mu * \rho_\varepsilon)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ definiert. Zeige

(i) $W_p(\mu, \mu_\varepsilon) \le \varepsilon M_p(\rho)$ mit $M_p(\rho)^p = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^p \rho(x)\,\mathrm{d}x$,

(ii) $W_p(\mu * \rho_\varepsilon, \nu * \rho_\varepsilon) \le W_p(\mu, \nu)$,

(iii) $\lim_{\varepsilon\to 0} W_p(\mu * \rho_\varepsilon, \nu * \rho_\varepsilon) = W_p(\mu, \nu)$.

Aufgabe 2. Das Benamou–Brenier-Funktional
Sei $1 < p < \infty$ und $q = p/(p-1)$ der duale Exponent. Wir definieren die Menge

$$K_q := \Big\{ (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \,\Big|\, a + \frac{1}{q}|b|^q \le 0 \Big\}.$$

Zeige, dass für $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ gilt

$$\sup_{(a,b)\in K_q} (au + b\cdot v) = f_p(u,v) := \begin{cases} \frac{1}{p}\frac{|v|^p}{u^{p-1}} & \text{wenn } u > 0 \\ 0 & \text{wenn } u = 0,\ v = 0 \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f_p konvex (in (u,v)) und positiv 1-homogen vom Grad 1 ist.

Aufgabe 3. Eindeutigkeit der Lösung der Kontinuitätsgleichung
Wir betrachten in $\mathbb{R}^d$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t + \nabla\cdot(v_t\mu_t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{KGl}$$

Zeige, dass unter der Bedingung $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |v_t(x)| + \mathrm{Lip}(v_t;\mathbb{R}^d) \le C$ Eindeutigkeit der Lösungen vorliegt. Betrachte dazu

- die Lösungen $X_t^\varepsilon(s,x)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung $\partial_t X_t^\varepsilon(s,x) = v_t^\varepsilon(X_t^\varepsilon(s,x))$ mit Anfangsbedingung $X_s^\varepsilon(s,x) = x$ und einer glatten Approximation v^ε von v.

- die Testfunktion $\varphi^\varepsilon(t,x) := -\int_t^1 \psi(s, X_s^\varepsilon(t,x))\,\mathrm{d}s$ für $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(]0,1[\times\mathbb{R}^d)$. Welche Gleichung erfüllt φ^ε?

Teste eine geeignete Gleichung mit φ^ε und folgere die Eindeutigkeit!
(Hinweis: Es gilt $X_s^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon(0,x)) = X_s^\varepsilon(0,x)$.)

Aufgabe 4. Hamilton-Jacobi-Gleichung
Betrachte die dynamische Formulierung der 2-Wasserstein-Metrik à la Benamou–Brenier

$$W_2(\mu_0,\mu_1)^2 = \min\left\{ \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu_t(x)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \mu_{t=i} = \mu_i,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t + \nabla\cdot(v_t\mu_t) = 0 \right\}.$$

Sei λ der Lagrange-Multiplikator für die Nebenbedingungen in obigem Minimierungsproblem. Zeige, dass λ die folgende Hamilton–Jacobi-Gleichung erfüllt:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{\alpha}|\nabla\lambda(t,x)|^2 = 0 \tag{HJ}$$

für ein geeignetes $\alpha > 0$.