Optimaler Transport und Wasserstein-Gradientenflüsse
Dr. Matthias Liero

26. November 2017

Übungsblatt 3

zum 5.12.2017

Aufgabe 1. c-Transformierte
Sei (X, d) ein Polnischer Raum. Wir betrachten die Kostenfunktion $\mathsf{c} = \mathsf{d}$. Zeige, dass φ 1-Lipschitz-stetig, genau dann wenn φ c-konkav ist. Zeige, dass $\varphi^{\mathsf{c}} = -\varphi$.

Aufgabe 2. Direkter Beweis für Dualität
Seien $(\mathcal{X}, \mathsf{d}_{\mathcal{X}})$ und $(\mathcal{Y}, \mathsf{d}_{\mathcal{Y}})$ kompakte metrische Räume und $\mathsf{c} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, \infty[$ stetig. Für $\xi \in \mathrm{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ und $\mu_0 \in \mathrm{Prob}(\mathcal{X})$, $\mu_1 \in \mathrm{Prob}(\mathcal{Y})$ definiere

$$\mathcal{H}(\xi) := -\sup \Big\{ \int_{\mathcal{X}} \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu_0 + \int_{\mathcal{Y}} \psi(y) \, \mathrm{d}\mu_1 \, \Big| \, \varphi \oplus \psi \le c - \xi \Big\}.$$

(i) Zeige $\mathcal{H} : \mathrm{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to \mathbb{R}$ ist konvex und unterhalbstetig bzgl. gleichmäßiger Konvergenz.

(ii) Berechne die Legendre-Transformierte $\mathcal{H}^*$.

(iii) Benutze $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^*$ um die Äquivalenz der dualen Kantorovich-Formulierung zu beweisen.

Aufgabe 3. Optimale Transportabbildung
Sei $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R}^d)$ mit $\int |x|^2 \, \mathrm{d}\mu < \infty$ und $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex. Ferner sei u μ-f.ü. differenzierbar mit $\int |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Zeige, dass $T := \nabla u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Monge-optimal für μ und $T_\# \mu$ bzgl. $\mathsf{c}(x, y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$ ist.

Aufgabe 4. Eindimensionaler Transport
Für $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R})$ ist die Verteilungsfunktion $F_\mu : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben durch

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]).$$

Die Pseudo-Inverse $F_\mu^{[-1]} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ von F_μ ist gegeben durch

$$F_\mu^{[-1]}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, F_\mu(x) \ge t\}.$$

(i) Zeige, dass $\mu = (F_\mu^{[-1]})_\# \mathcal{L}^1_{|[0,1]}$ ($\mathcal{L}^1_{|[0,1]}$ ist das eindimensionale Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$)

(ii) Für $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R})$ sei $\gamma := (F_\mu^{[-1]}, F_\nu^{[-1]})_\# \mathcal{L}^1_{|[0,1]}$. Zeige, dass γ die Randverteilungen μ und ν hat und $\gamma(]-\infty, a] \times]-\infty, b]) = \min\{F_\mu(a), F_\nu(b)\}$ gilt. γ heißt co-monotoner Transportplan.

(iii) Zeige, dass wenn μ keine Atome hat ($\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$), dann gilt $(F_\mu)_\# \mu = \mathcal{L}^1_{|[0,1]}$.

(iv) Für $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R})$ mit $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zeige, dass $T(x) = F_\nu^{[-1]}(F_\mu(x))$ eine wohldefinierte, nicht-fallende Abbildung mit $T_\# \mu = \nu$ ist.