Optimaler Transport und Wasserstein-Gradientenflüsse
Dr. Matthias Liero 25. Oktober 2017

Übungsblatt 2

zum 7.11.2017

Aufgabe 1. Subdifferential

Definition 1. *Sei V normierter Raum, $F : V \to (-\infty, \infty]$. Ein $\xi \in V^*$ heißt* ***Subgradient*** *für F in u, falls $i \in \mathrm{dom}(F) := \{u \in V \,:\, F(u) < \infty\}$ und*

$$F(v) \geq F(u) + \langle \xi, v - u \rangle, \quad \text{für alle } v \in V.$$

Die Menge

$$\partial F(u) := \{\xi \in V^* \,:\, \xi \text{ ist Subgradient für } F \text{ in } u\} \subset V^*$$

heißt ***Subdifferential*** *von F in u. Falls $F(u) = \infty$, so setzen wir $\partial F(u) = \emptyset$.*

(a) Zeige, dass wenn F differenzierbar ist ($\mathrm{D}F(u)[h] := \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}(F(u + \alpha h) - F(u))$ existiert und $\mathrm{D}F(u) \in V^*$), dann folgt $\partial F(u) = \{\mathrm{D}F(u)\}$.

(b) Zeige, dass

$$\begin{aligned} \xi \in \partial F(u) \qquad &\iff \qquad F(u) + F^*(\xi) = \langle \xi, u \rangle, \\ u \in \partial F^*(\xi) \qquad &\iff \qquad F^{**}(u) + F^*(\xi) = \langle \xi, u \rangle. \end{aligned}$$

(c) Zeige, u_* minimiert F genau dann wenn $0 \in \partial F(u_*)$.

(d) Berechne ∂F für $V = \mathbb{R}$ und

(i) $F(u) = a|v|$, $a > 0$

(ii) $F(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u \leq 0 \end{cases}$ sowie $F(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$

(e) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ konvex, unterhalbstetig und f eigentlich (es existiert ein u_0, so dass $f(u_0) < \infty$), dann gilt dasselbe für $F : \mathrm{L}^p(\Omega) \to (-\infty, \infty]$, ($1 \leq p < \infty$)

$$F(u) = \int_\Omega f(u(x))\,\mathrm{d}x, \qquad \text{falls } f \circ u \in \mathrm{L}^1(\Omega),$$

und $F(u) = \infty$ andernfalls. Weiterhin gilt für $w \in \mathrm{L}^q(\Omega)$ ($1/p + 1/q = 1$)

$$w \in \partial F(u) \qquad \iff w(x) \in \partial f(u(x)).$$

(f) Zeige, dass für $F_1, F_2 : V \to (-\infty, \infty]$ gilt, dass $\partial(F_1 + F_2)(u) \supset \partial F_1(u) + \partial F_2(u)$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, warum?

(g) Zeige, dass ∂F zyklisch monoton ist, d.h. für alle Paare (u_i, ξ_i), $i = 0, \ldots, m$, mit $\xi_i \in \partial F(u_i)$ gilt

$$\langle \xi_0, u_1 - u_0 \rangle + \langle \xi_1, u_2 - u_1 \rangle + \cdots + \langle \xi_m, u_0 - u_m \rangle \leq 0.$$

Aufgabe 2. Jensensche Ungleichung Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : V \to \mathbb{R}$ konvex.

(a) Zeige, dass $f(q_1 u_1 + q_2 + \cdots q_n u_n) \leq q_1 f(u_1) + q_2 f(u_2) + \cdots, q_n f(u_n)$ gilt, falls $q_i \geq 0$ für alle i und $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$ ist.

(b) Sei Ω offen und beschränkt und u eine stückweise konstante Funktion auf Ω mit Werten in V. Zeige

$$f\Big(\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x\Big) \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_\Omega f(u(x))\,\mathrm{d}x.$$

(c) Folgere, dass (b) auch für $u \in \mathrm{L}^1(\Omega; V)$ gilt.

Aufgabe 3. Finde eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]$, so dasss $(f_n)_\#(\mathcal{L}^1_{|[0,1]}) = \mathcal{L}^1_{|[0,1]}$, aber $f_n \rightharpoonup 1/2$ ($\mathcal{L}^1_{|[0,1]}$ bezeichnet dass eindimensionale Lebesgue-Maß eingeschränkt auf $[0,1]$). *Kann* f_n in $\mathrm{C}^1([0,1])$ liegen?