Optimaler Transport und Wasserstein-Gradientenflüsse
Dr. Matthias Liero 23. Oktober 2017

Übungsblatt 1

zum 24.10.2017

Aufgabe 1. Konvexe Analysis

(a) Sei $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ eine Familie konvexer Funktionen mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ auf einem Banachraum $(X, \|\cdot\|)$. Zeige, dass auch $x \mapsto f(x) := \sup_\alpha f_\alpha(x)$ konvex ist.

(b) Sei $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ eine Familie unterhalbstetiger Funktionen auf einem metrischen Raum (X, d) mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, dass auch $x \mapsto f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$ unterhalbstetig ist.

(c) Auf einem Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ sei eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben. Die duale Funktion $f^* : X^* \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch die Legendre-Transformation $f^*(\xi) := (\mathcal{L}f)(\xi) := \sup\{\langle \xi, x\rangle - f(x) \,|\, x \in X\}$. Zeige:

(i) $\xi \mapsto f^*(\xi)$ ist konvex und unterhalbstetig;

(ii) $(f + c)^*(\xi) = f^*(\xi) - c$ für alle $c\mathbb{R}$, $(\alpha f)^*(\xi) = \alpha f^*(\xi/\alpha)$ für alle $\alpha > 0$;

(iii) $f^{**} \leq f$ und Gleichheit gilt genau dann wenn f konvex und unterhalbstetig ist;

(iv) Bestimme f^* für $f(x) = |x|^p/p$, $1 < p < \infty$, und $f(x) = a|x|$, $a > 0$.

Aufgabe 2. Konvergenz von Maßen
Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{Prob}(X)$ auf einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ konvergiert schwach* gegen einen Grenzwert μ, genau dann wenn

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \to \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{1}$$

für alle $f \in \mathrm{C}_0(X)$ (stetige Funktionen die im Unendlichen verschwinden, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \subset X$ kompakt, so dass $|f| \leq \varepsilon$ auf $X \setminus K_\varepsilon$).
Wir sagen: $(\mu_n)_n^\infty$ konvergiert schwach gegen μ, wenn die Konvergenz in (1) für alle $f \in \mathrm{C_b}(X)$ gilt (beschränkte stetige Funktionen).

(a) Zeige, dass $\mathrm{Prob}(X)$ im Allgemeinen nicht abgeschlossen unter schwach* Konvergenz ist.

(b) Zeige, dass eine von unten beschränkte Funktion $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ genau dann unterhalbstetig ist, wenn eine Folge Lipschitz-stetiger Funktionen f_k existiert mit $f_k(x) \uparrow g(x)$ für jedes x und $k \to \infty$(Betrachte $f_k(x) = \inf_y\{g(y) + k\|x-y\|\}$).

(c) Zeige, dass wenn $(\mu_n)_{n=1}^n$ schwach gegen μ konvergiert und $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine von unten beschränkte, unterhalbstetige Funktion ist, gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \geq \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Aufgabe 3. Weierstraßsches Prinzip

(a) Sei $(\mathcal{X}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig mit $\mathcal{M}_\alpha := \{x \in \mathcal{X} \mid F(x) \leq \alpha\}$ kompakt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, dass F einen Minimierer besitzt.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, offen und beschränkt. Wir bezeichnen mit $X = \mathrm{H}^1(\Omega)$ den Hilbertraum aller Funktionen in $\mathrm{L}^2(\Omega)$ mit schwachen Ableitungen in $\mathrm{L}^2(\Omega)$ (siehe H.-W. Alt, 2006, Abschnitt 1.25). Betrachte das Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + u(x)^2 - f(x)u(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Zeige, dass F einen Minimierer besitzt. Welche Gleichung erfüllt er?