

Übungsblatt 9  
zum 26. Juni 2018

**Aufgabe 27: Normalenkegel und Subdifferentiale.**

(a) Betrachte eine abgeschlossene und konvexe Menge  $C \subset \mathbb{R}^m$ . Für  $p \in ]1, \infty[$  und ein beschränktes Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  sei  $X = L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$  und  $K = \{u \in X \mid u(x) \in C \text{ f.ü. in } \Omega\}$ . Zeige, dass der äußere Normalenkegel  $N_K(u)$  wie folgt gegeben ist

$$N_K(u) = \{\eta \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \mid \eta(x) \in N_C(u(x)) \text{ a.e. in } \Omega\}.$$

(b) Betrachte eine unterhalbstetige und konvexe Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$  mit  $f \neq \infty$  und definiere das Funktional

$$I_f : L^p(\Omega) \rightarrow [0, \infty]; \quad u \mapsto \int_{\Omega} f(u(x)) \, dx,$$

für ein  $p \in ]1, \infty[$ . Drücke  $\partial I_f(u)$  explizit bzgl.  $\partial f(u(x))$  aus.

**Aufgabe 28: Endlichdimensionale Variationsungleichung.**

Betrachte  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $K = [0, \infty[^2$ , und  $I(u) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) - b_1 u_1 - b_2 u_2$ .

(a) Berechne den eindeutigen Minimierer  $u_b$  von  $I$  über der Menge  $K$ .  
(*Tip: Man kann separat bzgl.  $u_1$  und  $u_2$  minimieren.*)

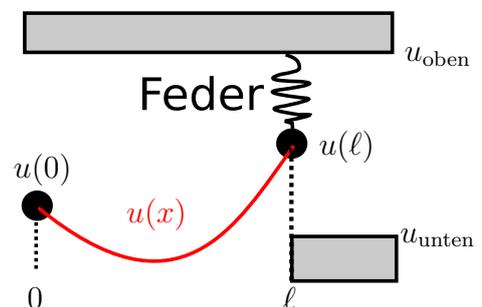
(b) Diskutiere die Gültigkeit der Variationsungleichung  $DI(u_b)[v - u_b] \geq 0$  für alle  $v \in K$ .

(c) Gib  $N_K(u_b)$  explizit an und überprüfe die Inklusion  $0 \in DI(u_b) + N_K(u_b)$ .

**Aufgabe 29: Elastisch gelagertes Seil.**

Wir betrachten einen Faden, der an der linken Seite fixiert sei und rechts elastisch gelagert ist, so dass das rechte Ende Werte in einem Intervall  $[u_{\text{unten}}, u_{\text{oben}}]$  annehmen kann.

Charakterisiere die Minimierer des Funktional  $I(u) = \int_0^\ell \frac{a}{2} u'(x)^2 + bu(x) \, dx + \frac{k}{2} (u(\ell) - u_0)^2$  unter der Nebenbedingung  $u(\ell) \in [u_{\text{unten}}, u_{\text{oben}}]$ .



Wähle ein geeignetes mathematisches Setting und diskutiere, wann die Nebenbedingung aktiv ist.