Übungsblatt 9

zum 26. Juni 2018

Aufgabe 27: Normalenkegel und Subdifferentiale.

(a) Betrachte eine abgeschlossene und konvexe Menge $C \subset \mathbb{R}^m$. Für $p \in \,]1,\infty[$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^d$ sei $X = \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ und $K = \{u \in X \,|\, u(x) \in C \text{ f.ü. in } \Omega\}$. Zeige, dass der äußere Normalenkegel $\mathrm{N}_K(u)$ wie folgt gegeben ist

$$\mathrm{N}_K(u) = \{\eta \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^m) \,|\, \eta(x) \in \mathrm{N}_C(u(x)) \text{ a.e. in } \Omega\}.$$

(b) Betrachte eine unterhalbstetige und konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^m \to [0,\infty]$ mit $f \not\equiv \infty$ und definiere das Funktional

$$I_f : \mathrm{L}^p(\Omega) \to [0,\infty]; \quad u \mapsto \int_\Omega f(u(x))\,\mathrm{d}x,$$

für ein $p \in \,]1,\infty[$. Drücke $\partial I_f(u)$ explizit bzgl. $\partial f(u(x))$ aus.

Aufgabe 28: Endlichdimensionale Variationsungleichung.
Betrachte $X = \mathbb{R}^2$, $K = [0,\infty[^2$, und $I(u) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) - b_1 u_1 - b_2 u_2$.

(a) Berechne den eindeutigen Minimierer u_b von I über der Menge K.
(*Tip: Man kann separat bzgl. u_1 und u_2 minimieren.*)

(b) Diskutiere die Gültigkeit der Variationsungleichung $\mathrm{D}I(u_b)[v - u_b] \geq 0$ für alle $v \in K$.

(c) Gib $N_K(u_b)$ explizit an und überprüfe die Inklusion $0 \in \mathrm{D}I(u_b) + N_K(u_b)$.

Aufgabe 29: Elastisch gelagertes Seil.
Wir betrachten einen Faden, der an der linken Seite fixiert sei und rechts elastisch gelagert ist, so dass das rechte Ende Werte in einem Interval $[u_{\text{unten}}, u_{\text{oben}}]$ annehmen kann.

Charakterisiere die Minimierer des Funktionals $I(u) = \int_0^\ell \frac{a}{2} u'(x)^2 + b u(x)\,\mathrm{d}x + \frac{k}{2}(u(\ell) - u_0)^2$ unter der Nebenbedingung $u(\ell) \in [u_{\text{unten}}, u_{\text{oben}}]$.

Wähle ein geeignetes mathematisches Setting und diskutiere, wann die Nebenbedingung aktiv ist.