Übungsblatt 8

zum 19. Juni 2018

Aufgabe 27: Gateaux- und Fréchet-Ableitungen.
(René E. Gateaux 1889–1914, Maurice R. Fréchet 1878 - 1973) Betrachte auf dem Hilbert-Raum $X = \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ das Funktional $I(u) = \int_\Omega g(u(x))\,\mathrm{d}x$, wobei $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^m)$ die folgende Bedingung erfüllt

$$\exists\, C > 0\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}^m : \quad |g(a+b) - g(a)| \le C(1+|a|)|b|.$$

(a) Zeige die Gateaux-Differenzierbarkeit von I mit $\mathrm{D}^{\mathrm{G}}I(u)[v] = \int_\Omega \partial_u g(u(x)) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$, d.h. für alle $u, v \in X$ gilt $\delta I(u; v) := \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\big(I(u+tv) - I(u)\big) = \mathrm{D}I(u)[v]$.

(b) Zeige, dass $\mathrm{D}^{\mathrm{G}}I(u)$ auch die Fréchet-Ableitung $\mathrm{D}^{\mathrm{F}}I(u)$ ist, falls zusätzlich ein $\theta \in\,]0, 1]$ und $C > 0$ existiert, so dass $|\partial_u g(a) - \partial_u g(b)| \le C_2\big(1+|a|+|b|\big)^{1-\theta}|a-b|^\theta$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^m$.

(c) Betrachte nun den Fall $X = \mathrm{L}^1(\Omega)$ mit $\Omega = \,]0, \ell[\, \subset \mathbb{R}^1$ und das Funktional $I(u) = \int_\Omega g(u(x))\,\mathrm{d}x$ mit $g(u) = u^3/(1+u^2)$. Weise nach, dass I Gateaux-differenzierbar in $u = 0$ ist, aber nicht Fréchet-differenzierbar.

Aufgabe 28: Quantenmechanische Grundzustände.
Die räumliche Verteilung eines Elektron in einem Wasserstoff-Atom wird durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho : \Omega \to [0, \infty[$ gegeben, wobei wir der Einfachheithalber annehmen, dass $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$. Die Wellenfunktion $\psi : \Omega \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ führt auf die Dichte ρ via $\rho(x) = |\psi(x)|^2$. Der Grundzustand des Elektrons ist der Minimierer der Gesamtenergie $I(\psi) = I_{\mathrm{kin}}(\psi) + I_{\mathrm{Coul}}(\psi)$ unter der Nebenbedingung $\int_\Omega |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Die kinetische Energie $I_{\mathrm{kin}}(\psi) = \int_\Omega \mu|\nabla\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x$ und die Coulombsche Wechselwirkungsenergie $I_{\mathrm{Coul}}(\psi) = \int_\Omega -\frac{\gamma}{|x|}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x$ sind mit Hilfe von physikalischen Konstanten μ und γ definiert.

(a) Zeige, dass für alle $R \in\,]0, \infty[$ ein Grundzustand ψ_* existiert.
Tip: Zeige und benutze, dass $(x \mapsto 1/|x|) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ und $\|u\|_{\mathrm{L}^4} \le C\|u\|_{\mathrm{L}^2}^{1/4}\|u\|_{\mathrm{H}^1}^{3/4}$.

(b) Zeige, dass es einen reellwertigen und nicht-negativen Grundzustand gibt, d.h. $\psi(x) = \Re\psi(x) \ge 0$ f.ü. ($\Re$ bezeichnet den Realteil)

(c) Zeige für den physikalisch relevanten Fall $R = \infty$ dass eine Lösung der Form $\psi(x) = \alpha\mathrm{e}^{-\beta|x|}$ die Euler–Lagrange-Gleichungen erfüllt.

Aufgabe 29: Erweitern des Definitionsbereichs.

Betrachte Banach-Räume X und Y mit der stetigen Einbettung $Y \subset X$. Betrachte ferner ein Funktional $I : Y \to \mathbb{R}_\infty$, dass schwach unterhalbfolgenstetig und koerziv ist.

(a) Zeige, dass die Erweiterung $\widetilde{I} : X \to \mathbb{R}_\infty$ von I definiert durch $\widetilde{I}(x) = \infty$ für $x \in X \setminus Y$ auch schwach unterhalbfolgenstetig und koerziv ist.

(b) Gib ein Beispiel für X, Y, und I an, so dass $I : X \to \mathbb{R}_\infty$ schwach unterhalbfolgenstetig ist, aber $\widetilde{I} : Y \to \mathbb{R}_\infty$ nicht.

– bitte wenden –

Aufgabe 30: Schwache Abgeschlossenheit.
Betrachte eine abgeschlossene Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^m$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Definiere $\mathcal{C}_p = \{u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \,|\, u(x) \in C \text{ f.ü. in } \Omega\}$ für $p \in (1, \infty)$.

(a) Zeige, dass $\mathcal{C}_p$ schwach folgenabgeschlossen ist, wenn C konvex ist.

(b) Zeige, dass die schwache Folgenabgeschlossenheit von $\mathcal{C}_p$ die Konvexität von C impliziert.