Mehrdimensionale Variationsrechnung
Dr. Matthias Liero 5. Juni 2018

Übungsblatt 7

zum 12. Juni 2018

Aufgabe 22: Stark- und schwachstetige Funktionale auf L^p
Betrachte $f \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m)$ mit

$$\exists\, C > 0,\ p \in [1, \infty[\,,\ h \in \mathrm{L}^1(\Omega)\ \forall\, (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m : \quad |f(x, u)| \leq C(h(x) + |u|^p).$$

(a) Zeige, dass das Funktional $I : \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R};\ u \mapsto \int_\Omega f(x, u(x))\,\mathrm{d}x$ stetig ist bzgl. der starken Konvergenz in $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

(b) Zeige, dass aus der schwachen Stetigkeit von I folgt, dass $f(x, \cdot)$ affin ist, d.h. es existieren $a \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$ und $b \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, so dass $f(x, u) = a(x) + b(x) \cdot u$.
(*Tip: Betrachte Funktionen u_ε die schnell zwischen zwei Werten $w_0 \in \mathbb{R}$ and $w_1 \in \mathbb{R}$ oszillieren, und der schwache Grenzwert den Wert $w_\theta := (1-\theta)w_0 + \theta w_1$ annimmt.*)

Aufgabe 23: Unterhalbstetigkeit und Konvexität
Wir betrachten auf einem separablen, reflexiven Banach-Raum X eine Familie von (schwach) unterhalbfolgenstetigen Funktionalen $G_\alpha : X \to \mathbb{R}^\infty$ gegeben durch einen Parameter $\alpha \in A$.

(a) Zeige, dass $F(u) = \sup_{\alpha \in A} G_\alpha(u)$ auch (schwach) unterhalbfolgenstetig ist.

(b) Nimm nun an, dass alle G_α auch konvex sind und folgere, dass F aus (a) auch konvex ist.

(c) Nimm an, dass alle G_α die Form $G_\alpha(u) = \gamma_\alpha + \ell_\alpha(u)$ für $\gamma_\alpha \in \mathbb{R}$ und $\ell_\alpha \in X'$ haben. Zeige, dass F aus (a) konvex und schwach unterhalbfolgenstetig ist.

Aufgabe 24: Schwache Unterhalbstetigkeit
Betrachte die Familie von Funktionalen $I : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}_\infty$ gegeben durch

$$I(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{1}{r}|u|^r + \big(1 + |\nabla u|^2\big)^\alpha \big(1 + u^2\big)^\beta \big(2 + \cos|u|\big)^\gamma \right\} \mathrm{d}x$$

für Exponenten $p, r, \alpha, \beta, \gamma > 1$.

(a) Gib Bedingungen für die Exponenten an, damit I koerziv auf $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ ist.

(b) Finde Bedingungen für die Exponenten, so dass I schwach unterhalbfolgenstetig auf $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ ist. (*Tip: Ein größeres r könnte den Kompaktheitssatz von Rellich verbessern.*)

Aufgabe 25: Fehlende Unterhalbstetigkeit
Betrachte $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ sowie das Funktional

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + a|u(x)|^p \right) \mathrm{d}x$$

auf $X = \mathrm{W}^{1,2}(\Omega) = \mathrm{H}^1(\Omega)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty[$.

(a) Zeige, dass I schwach unterhalbfolgenstetig ist, falls $a \geq 0$, oder wenn $a < 0$ und $p \in [1, 6[$.

(b) Zeige, dass für $p = 6$ und $a < 0$ starke Stetigkeit von I vorliegt.

(c) Zeige, dass für $a < 0$ und $p = 6$ keine schwache Unterhalbfolgenstetigkeit gilt.

(*Tip: Benutze die Folge $u_n(x) = cn^\alpha \max\{0, 1 - n^2|x|\}$ für passende Werte von c und α.*)