Übungsblatt 6

zum 5. Juni 2018

Aufgabe 19: Quasi- und Rang-1-Konvexität.
(a) Für gegebene $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\lambda \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ konstruiere eine Funktion $\widehat{w}_\varepsilon \in \mathrm{PC}^1(B_1(0);\mathbb{R}^m)$ mit der Eigenschaft, dass $\nabla\widehat{w}_\varepsilon(y)$ fast überall nur die beiden Werte $R_1 = -\lambda\xi \otimes \eta$ und $R_2 = (1{-}\lambda)\xi \otimes \eta$ annimmt und dass $\|\widehat{w}_\varepsilon\|_{\mathrm{C}^0} \leq \varepsilon|\xi||\eta|$ gilt.

(b) Setze nun $w_\varepsilon(y) = \chi_\varepsilon(y)\widehat{w}_\varepsilon(y)$ mit $\chi_\varepsilon(y) = \min\{1, (1{-}|y|)/\varepsilon\}$. Zeige, dass $\|\nabla w_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty}$ unabhängig von ε beschränkt bleibt und dass das Lebesgue-Maß der Mengen $\Omega_j^\varepsilon = \{y \in B_1(0) \,|\, \nabla w_\varepsilon(y) = R_j\}$ gegen $(1{-}\lambda)|B_1(0)|$ bzw. $\lambda|B_1(0)|$ strebt.

(c) Folgere, dass die Quasi-Konvexität von f die Rang-1-Konvexität von f impliziert.

Aufgabe 20: Konvexität von Integranden und Funktionalen.
Für ein Funktional der Form

$$I(u) = \int_\Omega f(u(x), \nabla u(x))\,\mathrm{d}x$$

ist die Konvexität von $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ hinreichend für die Konvexität von I aber nicht notwendig. Betrachte den eindimensionalen Fall $\Omega = \,]0,\ell[$ und $f(u,A) = \frac{1}{2}|A|^2 + (Bu)\cdot A + \frac{1}{2}|u|^2$ für ein gegebenes $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

(a) Zeige, dass die Konvexität von f äquivalent ist zu $\|B\| := \sup\{|Bu| \,|\, |u| \leq 1\} \leq 1$.

(b) Zeige, dass $I : X = \mathrm{C}_0^1([0,\ell];\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ konvex ist, falls $\|B{-}B^\top\| \leq 2$.

(c) Verbessere das Resultat in (b) in Abhängigkeit von $\ell < \pi$ indem Poincarés Ungleichung $\int_0^\ell |u'|^2\,\mathrm{d}x \geq \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \int_0^\ell |u|^2\,\mathrm{d}x$ benutzt wird.

Aufgabe 21: Stark- und schwachstetige Funktionale auf L^p
Betrachte $f \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m)$ mit

$$\exists\, C > 0,\ p \in [1,\infty[\,,\ h \in \mathrm{L}^1(\Omega)\ \forall\,(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m : \quad |f(x,u)| \leq C(h(x) + |u|^p).$$

(a) Zeige, dass das Funktional $I : \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R};\ u \mapsto \int_\Omega f(x,u(x))\,\mathrm{d}x$ stetig ist bzgl. der starken Konvergenz in $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

(b) Zeige, dass aus der schwachen Stetigkeit von I folgt, dass $f(x,\cdot)$ affin ist, d.h. es existieren $a \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$ und $b \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$, so dass $f(x,u) = a(x) + b(x)\cdot u$.
(*Tip: Betrachte Funktionen u_ε die schnell zwischen zwei Werten $w_0 \in \mathbb{R}$ and $w_1 \in \mathbb{R}$ oszillieren, und der schwache Grenzwert den Wert $w_\theta := (1{-}\theta)w_0 + \theta w_1$ annimmt.*)