Mehrdimensionale Variationsrechnung
Dr. Matthias Liero 22. Mai 2018

Übungsblatt 5

zum 29. Mai 2018

Aufgabe 15: Jensen'sche Ungleichung.
(Johan L.W.V. Jensen 1859–1925 Kopenhagen)
Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_\infty$ konvex.

(a) Betrachte $u_1, \ldots, u_K$, $\theta_k \geq 0$ mit $\theta_1 + \cdots \theta_K = 1$. Zeige

$$f(\theta_1 u_1 + \cdots + \theta_K u_K) \leq \sum_{k=1}^{K} \theta_k f(u_k).$$

(b) Für eine stückweise konstante Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ zeige, dass

$$f\big(\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x\big) \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_\Omega f(u(x))\,\mathrm{d}x.$$

(c) Zeige, dass (b) auch für $u \in \mathrm{C}^0(\Omega;\mathbb{R}^m)$ oder $\mathrm{L}^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ gilt.

Aufgabe 16: Quasi-Konvexität
Die Definition der Quasikonvexität ist für $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ über der Einheitskugel $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$ und für Testfunktionen $v \in \mathrm{PC}^1_0(B_1(0);\mathbb{R}^m)$ formuliert.

Zeige, dass die Definition der Quasi-Konvexität äquivalent ist, wenn $B_1(0)$ durch beliebige beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ersetzt wird.

Aufgabe 17: Quasi- und Rang-1-Konvexität.
(a) Für gegebene $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\lambda \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ konstruiere eine Funktion $\widehat{w}_\varepsilon \in \mathrm{PC}^1(B_1(0);\mathbb{R}^m)$ mit der Eigenschaft, dass $\nabla\widehat{w}_\varepsilon(y)$ fast überall nur die beiden Werte $R_1 = -\lambda\xi \otimes \eta$ und $R_2 = (1-\lambda)\xi \otimes \eta$ annimmt und dass $\|\widehat{w}_\varepsilon\|_{\mathrm{C}^0} \leq \varepsilon|\xi||\eta|$ gilt.

(b) Setze nun $w_\varepsilon(y) = \chi_\varepsilon(y)\widehat{w}_\varepsilon(y)$ mit $\chi_\varepsilon(y) = \min\{1, (1-|y|)/\varepsilon\}$. Zeige, dass $\|\nabla w_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty}$ unabhängig von ε beschränkt bleibt und dass das Lebesgue-Maß der Mengen $\Omega_j^\varepsilon = \{y \in B_1(0) \,|\, \nabla w_\varepsilon(y) = R_j\}$ gegen $(1-\lambda)|B_1(0)|$ bzw. $\lambda|B_1(0)|$ strebt.

(c) Folgere, dass die Quasi-Konvexität von f die Rang-1-Konvexität von f impliziert.

Aufgabe 18: Konvexität von Integranden und Funktionalen.
Für ein Funktional der Form

$$I(u) = \int_\Omega f(u(x), \nabla u(x))\,\mathrm{d}x$$

ist die Konvexität von $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ hinreichend für die Konvexität von I aber nicht notwendig. Betrachte den eindimensionalen Fall $\Omega =]0,\ell[$ und $f(u,A) = \frac{1}{2}|A|^2 + (Bu)\cdot A + \frac{1}{2}|u|^2$ für ein gegebenes $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

(a) Zeige, dass die Konvexität von f äquivalent ist zu $\|B\| := \sup\{|Bu| \,|\, |u| \leq 1\} \leq 1$.

(b) Zeige, dass $I : X = \mathrm{C}^1_0([0,\ell];\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ konvex ist, falls $\|B - B^\top\| \leq 2$.

(c) Verbessere das Resultat in (b) in Abhängigkeit von $\ell < \pi$ indem Poincarés Ungleichung $\int_0^\ell |u'|^2\,\mathrm{d}x \geq \big(\frac{\pi}{\ell}\big)^2 \int_0^\ell |u|^2\,\mathrm{d}x$ benutzt wird.