Übungsblatt 4

zum 22. Mai 2018

Aufgabe 14: Konvexität
Betrachte eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, d.h.

$$\forall\, \theta \in [0,1]\ \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n : \quad f((1{-}\theta)u{+}\theta v) \leq (1{-}\theta)f(u) + \theta f(v).$$

(a) Zeige, dass diese Definition für eine stetige, endliche Funktion äquivalent dafür ist, dass für alel $v \in \mathbb{R}^n$ ein $b \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $f(u) \geq f(v) + b{\cdot}(u{-}v)$ für alle u. (*Tip: Benutze einen geeigneten Trennungssatz aus der Funktionalanalysis.*)

(b) Finde eine unterhalbstetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\infty$ ($f(u) \leq \liminf_{n\to\infty} f(u_n)$ wenn $u_n \to u$), die konvex ist und ein Punkt u existiert, so dass $f(u) < \infty$ und KEIN $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(v) \geq f(u) + a \cdot (v{-}u)$ für alle v.

(c) Nimm an, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($f(u) = \infty$ NICHT erlaubt) konvex ist. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 15: Jensen'sche Ungleichung.
(Johan L.W.V. Jensen 1859–1925 Kopenhagen)
Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_\infty$ konvex.

(a) Betrachte $u_1, \ldots, u_K$, $\theta_k \geq 0$ mit $\theta_1 + \cdots \theta_K = 1$. Zeige

$$f(\theta_1 u_1 {+} \cdots {+} \theta_K u_K) \leq \sum_{k=1}^{K} \theta_k f(u_k).$$

(b) Für eine stückweise konstante Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ zeige, dass

$$f\Big(\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x\Big) \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_\Omega f(u(x))\,\mathrm{d}x.$$

(c) Zeige, dass (b) auch für $u \in \mathrm{C}^0(\Omega;\mathbb{R}^m)$ oder $\mathrm{L}^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ gilt.

Aufgabe 16: Quasi-Konvexität
Die Definition der Quasikonvexität ist für $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ über der Einheitskugel $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$ und für Testfunktionen $v \in \mathrm{PC}^1_0(B_1(0);\mathbb{R}^m)$ formuliert.

Zeige, dass die Definition der Quasi-Konvexität äquivalent ist, wenn $B_1(0)$ durch beliebige beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ersetzt wird.

Aufgabe 17: Quasi- und Rang-1-Konvexität.
(a) Für gegebene $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\lambda \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ konstruiere eine Funktion $\widehat{w}_\varepsilon \in \mathrm{PC}^1(B_1(0);\mathbb{R}^m)$ mit der Eigenschaft, dass $\nabla\widehat{w}_\varepsilon(y)$ fast überall nur die beiden Werte $R_1 = -\lambda\xi \otimes \eta$ und $R_2 = (1{-}\lambda)\xi \otimes \eta$ annimmt und dass $\|\widehat{w}_\varepsilon\|_{\mathrm{C}^0} \leq \varepsilon|\xi||\eta|$ gilt.

(b) Setze nun $w_\varepsilon(y) = \chi_\varepsilon(y)\widehat{w}_\varepsilon(y)$ mit $\chi_\varepsilon(y) = \min\{1, (1{-}|y|)/\varepsilon\}$. Zeige, dass $\|\nabla w_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^\infty}$ unabhängig von ε beschränkt bleibt und dass das Lebesgue-Maß der Mengen $\Omega_j^\varepsilon = \{y \in B_1(0) \,|\, \nabla w_\varepsilon(y) = R_j\}$ gegen $(1{-}\lambda)|B_1(0)|$ bzw. $\lambda|B_1(0)|$ strebt.

(c) Folgere, dass die Quasi-Konvexität von f die Rang-1-Konvexität von f impliziert.