Mehrdimensionale Variationsrechnung
Dr. Matthias Liero 9. Mai 2018

Übungsblatt 3

zum 15.05.2018 (Achtung: Keine Vorlesung am 10.05.2018)

Aufgabe 10:
Betrachte $M = \mathrm{C}^1([a,b];\mathbb{R})$, Funktionen $g, h \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, und das Funktional $I : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$I(u) = \int_a^b g(u'(x)) + h(u(x))\,\mathrm{d}x.$$

(a) Stelle die zugehörigen Euler–Lagrange-Gleichungen auf. Welche Bedingungen garantieren, dass Lösungen der Form $u(x) = u^* = \text{const}$ existieren?

(b) Nimm an, dass $u(x) = u^* = \text{const}$ ein kritischer Punkt von I ist. Zeige, dass die Bedingungen $h''(u^*) > 0$ and $g''(0) > 0$ hinreichend sind um zu schließen, dass u^* ein strikter schwacher lokaler Minimierer von I ist.

(c) Nimm jetzt an, dass $g(A) \geq 0 = g(0)$ für alle $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und dass $u^0 \in \mathbb{R}$ ein lokaler Minimierer von h ist. Zeige, dass die konstante Funktion $\overline{u} : x \mapsto u^0$ ein starker lokaler Minimierer ist.

Aufgabe 11: Zweite Variation.
Betrachte das Funktional $I : \mathrm{C}^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ mit $I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\,\mathrm{d}x$, wobei $f \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d})$. Für $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ gelte

$$\int_\Omega \partial_A^2 f(x, u_0(x), \nabla u_0(x))[\nabla w, \nabla w]\,\mathrm{d}x \geq \gamma_1 \int_\Omega |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\mathrm{D}^2 I(u_0)[w,w] \geq \gamma_2 \int_\Omega |w|^2\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(a) Benutze (1) und geeignete Abschätzungen für $\partial_A\partial_u f$ und $\partial_u^2 f$ um eine geeignete Konstante C^* zu finden, so dass

$$\mathrm{D}^2 I(u_0)[w,w] \geq \gamma_1/2 \int_\Omega |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x - C^*|w|^2\,\mathrm{d}x \text{ für alle } w.$$

(b) Benutze (2) und (1) um ein $\gamma_3 > 0$ zu finden, so dass

$$\mathrm{D}^2 I(u_0)[w,w] \geq \gamma_3 \int_\Omega |\nabla w|^2 + |w|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } w \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m).$$

Aufgabe 12: Anisotrope Elastizität.
Das Funktional $I : \mathrm{C}^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R};\ u \mapsto \int_\Omega f(\nabla u)\,\mathrm{d}x$ ist definiert über

$$f(A) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{spur} A)^2 + \frac{\mu}{4}\left|A + A^T\right|^2 + \frac{\delta}{2}A_{11}^2.$$

(a) Zeige die Identität $\partial_A^2 f(A)[B,B] = 2f(B)$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

(b) Für welche $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ haben wir $f(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$? Betrachte zunächst den Fall $d = 2$.

(c) Für welche $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ erfüllt f die Legendre–Hadamard-Bedingung? Betrachte wieder erst den Fall $d = 2$.

Aufgabe 13: Eigenwerte.
Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ betrachten wir den Rayleigh-Quotienten

$$R_A(y) = \frac{y \cdot Ay}{y \cdot y} \quad \text{für } y \in \mathbb{S}^{m-1} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y| = 1\}.$$

Zeige, dass der Minimierer y_- und der Maximierer y_+ von R_A auf $\mathbb{S}^{m-1}$ existiert und $Ay_\pm = \lambda_\pm y_\pm$ erfüllt, wobei λ_- und λ_+ das Minimum und Maximum von R_A sind.