Mehrdimensionale Variationsrechnung
Dr. Matthias Liero 23. April 2018

Übungsblatt 2

zum 08.05.2018 (Achtung: Keine Vorlesung und Übung am 01.05.2018)

Aufgabe 5: Lemma of du Bois–Reymond.
Betrachte die Menge $T = \{v \in \mathrm{C}^1([\alpha,\beta];\mathbb{R}^m) \,|\, v(\alpha) = v(\beta) = 0\}$ und $f,\ g \in \mathrm{C}^0([\alpha,\beta];\mathbb{R}^m)$.

(a) Zeige, dass aus $\int_\alpha^\beta g(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $v \in T$ folgt, dass g konstant in $[\alpha,\beta]$ ist. (*Tip: (Konstruiere ein $v \in T$ mit $v'(x) = g(x) - \gamma$.)*)

(b) Sei nun $\int_\alpha^\beta [f(x)\cdot v(x) + g(x)\cdot v'(x)]\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $v \in T$. Schließe, dass $g \in \mathrm{C}^1([\alpha,\beta];\mathbb{R}^m)$ und $g'(x) = f(x)$ für alle $x \in [\alpha,\beta]$.

Aufgabe 6: Euler-Lagrange-Gleichung.
(a) Betrachte ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, die Menge $M = \mathrm{C}^2(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ und das Funktional $I : M \to \mathbb{R}$ definiert über

$$I(u) = \int_\Omega \Big[\frac{1}{2}\Big(\nabla u(x)\cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \nabla u(x) + \frac{\pi^2}{28}u^2\Big) - \frac{1}{4}u^4\Big]\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} 9\exp(-u(x))\,\mathrm{d}a.$$

Leite die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen mit Randbedingungen her.

(b) Betrachte ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, die Menge $M = \mathrm{C}^4(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ und das Funktional $I : M \to \mathbb{R}$ definiert über

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[|\Delta u(x)|^2 - f(x)u(x)\Big]\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g(x)u(x)\,\mathrm{d}a.$$

Leite die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen mit Randbedingungen her.

Aufgabe 7: Faltung = Glättung.
Betrachte eine Lipschitz-stetige Funktion $\widetilde{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, d.h. für $L = \mathrm{Lip}(\widetilde{u})$ gilt

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^d : \quad |\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)| \le L|x-y|.$$

(a) Betrachte die Funktion $\psi_\delta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\psi_\delta(x) = \frac{1}{\delta^d}\psi(x/\delta)$ und

$$\psi(x) = \begin{cases} c\exp\Big(-\frac{1}{1+|x|^2}\Big) & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

($c > 0$ so, dass $\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\,\mathrm{d}x = 1$) und definiere

$$u_\delta = \widetilde{u} * \psi_\delta :\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{u}(y)\psi_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Zeige, dass $\mathrm{Lip}(u_\delta) \le L$ und $\|\widetilde{u} - u_\delta\|_{\mathrm{C}^0} \le L\delta$ gilt.

(b) Zeige, dass für alle $w \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ die folgende Identität gilt

$$\mathrm{Lip}_{B_R(x_0)}(w) = \sup\{\|\nabla w(y)\|_{\mathbb{R}^{m\times d}} \,|\, y \in \mathrm{B}_R(x_0)\},$$

wobei die linke Seite die kleinste Lipschitz-Konstante von $w|_{B_R(x_0)}$ bezeichnet.
(*Tip: Um* $w(x)-w(y)$ *abzuschätzen, betrachte* w *auf der verbindenen Gerade.*)

(c) Schlussfolgere, dass $\|\nabla u_\delta\|_{\mathrm{C}^0} \le L = \mathrm{Lip}(\widetilde{u})$ gilt.

Aufgabe 8: Vektoranalysis und Eshelby's Tensor.
Betrachte ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

(a) Leite für Tensorfelder $A \in \mathrm{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^{m\times d})$ und $B \in \mathrm{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^{n\times m})$ die Produktregel her, d.h.

$$\mathrm{div}(B\,A) = C{:}A + B\mathrm{div}A \quad \text{ mit } (C{:}A)_\nu = \textstyle\sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} B_{\nu\mu} A_{\mu j}.$$

(b) Für eine Energiedichte $f \in \mathrm{C}^2(\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d})$ ist ESHELBY's Tensor definiert über

$$\mathbb{E}(x,u,A) = A^\top \partial_A f(x,u,A) - f(x,u,A) I_d \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

Zeige, dass eine Lösung $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ der Euler–Lagrange-Gleichung bezüglich f die folgende Gleichung erfüllt

$$\mathrm{div}\mathbb{E}(\cdot,u,\nabla u)(x) + \partial_x f(x,u(x),\nabla u(x)) = 0 \in \mathbb{R}^d.$$

(c) Betrachte den Fall $d=1$ und vergleiche die Beziehung in (b) mit dem Satz von Noether aus der Vorlesung.

Aufgabe 9: Klassische Mechanik
In der LAGRANGE'schen Mechanik betrachten wir ein Funktional aus Kinetischer Energie minus potentieller Energie:

$$\mathcal{L}(t,q,\dot q) = \mathcal{K}(q,\dot q) - \mathcal{U}(t,q) \quad \text{mit} \quad \mathcal{K}(q,v) = \frac{1}{2}(M(q)v)\cdot v$$

(a) Leite die Euler-Lagrange-Gleichungen für $I(q) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t,q(t),\dot q(t))\,\mathrm{d}t$ her und zeige deren Äquivalenz zu den Newton'schen Gleichungen (Impulsänderung = Kraft), siehe z.B. W. Nolting, *Theoretische Physik, Band 2, Analytische Mechanik*.

(b) Wann ist die Energie $\mathcal{E}(t,q,\dot q) = \mathcal{K}(q,\dot q) + \mathcal{U}(t,q)$ entlang von Lösungen konstant?

(c) Es sei $w \in \mathbb{R}^m$ eine Richtung für die $\mathrm{D}_q\mathcal{U}(t,q)[w] = 0$ für alle $(t,q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ gilt. Folgere, dass der Impuls in w-Richtung konstant entlang von Lösungen ist.