Mehrdimensionale Variationsrechnung
Dr. Matthias Liero 9. Juli 2018

Übungsblatt 12

zum 17. Juli 2018

Aufgabe 37: Beispiele für Γ-Grenzwerte.
Berechne die schwachen und starken Γ-Grenzwerte der folgenden Folgen von Funktionalen $I_n : X \to \mathbb{R}_\infty$:

(a) $X = \mathrm{L}^2(]0,1[)$, $I_k(u) = \int_{5/k}^1 k^2 \big(u(x{-}1/k) - u(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x$

(b) $X = \mathrm{L}^2(]{-1},1[)$, $I_k^{(\alpha)}(u) = \int_{-1}^1 \big(a_k(x)\big)^\alpha \big(u'(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x$ für $u \in \mathrm{H}^1(]{-1},1[)$ und ∞ sonst, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein fixierter Parameter ist und $a_k(x) = c_0 k$ für $|x| < 1/k$ und $a_k(x) = 1$ sonst.

Aufgabe 38: Γ-Konvergenz quadratische Funktionale
Sei X ein Hilbert-Raum und $I_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ eine Familie quadratischer Funktionale, d.h. $I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\langle A_\varepsilon u, u\rangle$ mit einer Familie linearer, stetiger Operatoren $A_\varepsilon : X \to X' \simeq X$. Zeige, dass wenn I_ε bzgl. der schwachen Topologie auf X gegen einen Γ-Grenzwert I_0 konvergiert, dann ist I_0 auch quadratisch. (*Tip: Benutze die Parallelogrammidentität und $I_\varepsilon(tv) = t^2 I_\varepsilon(v)$ für $t \in \mathbb{R}$.*)

Aufgabe 39: Γ-Grenzwerte sind unterhalbstetig.
Zeige über einen Widerspruchsbeweis und ein Diagonalfolgenargument, dass der starke und schwache Γ-Grenzwert einer Folge von Funktionalen stark bzw. schwach unterhalbfolgenstetig ist.