Übungsblatt 11

zum 10. Juli 2018

Definition (Fourier-Transformation). *Für* $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ *ist die Fourier-Transformierte* $\widehat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *definiert über*

$$\widehat{u}_i(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u_i(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x, \quad i = 1,\dots,m.$$

Siehe z.B. Dirk Werner, Funktionalanalysis, Abschnitt V.2.

Aufgabe 34: Quasikonvexität quadratischer Funktionen.
Betrachte eine quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$, d.h. $f(A) = (MA) : A$ für ein $M \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{m\times d};\mathbb{R}^{m\times d})$ mit $(MA) : B = (MB) : A$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{m\times d}$. Benutze die Fourier-Transformation und ihre Eigenschaften um zu zeigen, dass f genau dann quasikonvex ist, wenn es Rang-1-konvex ist.

Aufgabe 35: Fehlende Polykonvexität.
Betrachte $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(A) = |A|^4 - \frac{4}{\sqrt{3}}|A|^2 \det A.$$

Zeige, dass f nicht polykonvex ist.

Aufgabe 36: Rank-1-affine Funktionen.
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ heißt Rang-1-affin, falls f und $-f$ Rang-1-konvex sind.

a) Zeige, dass die Minorenabbildung $T : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^{\tau(m,d)}$ Rang-1-affin ist.

b) Betrachte eine Rang-1-affine Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times 2} \to \mathbb{R}$.

i) Mit der Notation $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, wobei $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^m$, zeige, dass f geschrieben werden kann als

$$f(a_1, a_2) = \beta + b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 + a_1 \cdot (Ba_2),$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^m$ and $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

ii) Schließe, dass B schief-symmetrisch ist ($B = -B^\top$).

iii) Zeige, dass ein $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{\tau(m,2)}$ existiert, so dass $f(A) = \beta + \langle \boldsymbol{\beta}, T(A)\rangle$.