Mehrdimensionale Variationsrechnung
Dr. Matthias Liero 26. Juni 2018

Übungsblatt 10

zum 3. Juli 2018

Aufgabe 31: Ein Gegenbeispiel für schwache Konvergenz der Determinante.
Sei $m = d = p = 2$ und $\Omega = \,]-1,1[^2$. Betrachte die Folge

$$u^k(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{k}}(1-|x_2|)^k\big(\sin(kx_1),\cos(kx_1)\big).$$

(a) Zeige, dass $u^k \rightharpoonup 0$ in $\mathrm{H}^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$.

(b) Beweise, dass $\int_\Omega \det(\nabla u^k)\varphi\,\mathrm{d}x \to 0$ für alle $\varphi \in \mathrm{C_c}(\Omega)$.

(c) Zeige, dass $\det(\nabla u^k)$ NICHT schwach gegen 0 in $\mathrm{L}^1(\Omega)$ konvergiert. (*Tip: Betrachte ein geeignetes $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ in (b).*)

Aufgabe 32: Polykonvexität.
Betrachte $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ (nur endliche Werte!). Zeige, dass f polykonvex ist, genau dann wenn für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ ein $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(A) \in \mathbb{R}^{\tau(m,d)}$ existiert, so dass

$$\forall\, B \in \mathbb{R}^{m\times d} \quad f(B) \geq f(A) + \boldsymbol{\beta}\cdot\big(T(B)-T(A)\big).$$

($T : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}^{\tau(m,d)}$ ist die Minorenabbildung.)

Aufgabe 33: Quadratische Funktionen.
Betrachte eine quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$, d.h. $f(A) = (MA) : A$ für ein $M \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^{m\times d};\mathbb{R}^{m\times d})$. Zeige die folgenden Äquivalenzen:

(a) f ist konvex $\iff f(A) \geq 0$ für alle A.

(b) f ist polykonvex $\iff \exists \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{\tau_2(m,d)}\ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times d} : f(A) \geq \boldsymbol{\beta}\cdot T_2(A)$.

(c)f ist Rang-1-konvex $\iff \forall \xi \in \mathbb{R}^m,\ \eta \in \mathbb{R}^d : f(\xi\otimes\eta) \geq 0$.