Mehrdimensionale Variationsrechnung
Dr. Matthias Liero 13. April 2018

Übungsblatt 1

zum 24.04.2018

Aufgabe 1: Lineare Algebra.
Sei $I(u) = \frac{1}{2}\langle u, Au\rangle - \langle b, u\rangle$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b, u \in \mathbb{R}^n$, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt.

(a) Zeige, dass u genau dann ein kritischer Punkt von I ist, wenn $\frac{1}{2}(A + A^\top)u = b$ ist.

(b) Nimmt I sein Infimum an, falls A symmetrisch und positiv definit ist?

(c) Es sei A symmetrisch und positiv semidefinit. Unter welchen Bedingungen an b ist $\inf I > -\infty$? Gilt dann $\inf I = \min I$?

Aufgabe 2: Vektoranalysis.
(a) Beweisen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nur dann ein Extremum im Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt, wenn x^0 ein kritischer Punkt von f ist, d.h. die erste Variation ist 0.

(b) Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeige, dass die Funktion f im Punkt x^0 ein lokales Minimum (bzw. Maximum) in x^0 hat, wenn die zweite Variation, d.h. die quadratische Form $\langle H(x^0)w, w\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x^0)\, w_i w_j$, positiv (bzw. negativ) definit ist ($H(x^0)$ = Hesse-Matrix).

Aufgabe 3: Ein Beispiel ohne Minimierer.
Im Folgenraum $\ell^2 = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^\infty u_n^2 < \infty\}$ mit Norm $\|(u_n)_n\|_2 = \big(\sum_1^\infty u_n^2\big)^{1/2}$ ist Funktional $I : l^2 \to \mathbb{R}$ durch $I(u) = (1 - \|u\|_2^2)^2 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} u_n^2$ definiert.

(a) Zeige, dass I stetig ist und dass $I(u) > 0$ für alle $u \in \ell^2$ gilt.

(b) Überprüfen Sie durch Konstruktion einer geeigneten infimierenden Folge, dass das Infimum des Funktionals I gleich 0 ist.

Aufgabe 4: Lokale Minimierer.
Finde eine Funktion $I \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften

(a) Für alle Geraden $\gamma_v : \mathbb{R} \in t \mapsto tv \in \mathbb{R}^2$ hat die Einschränkung von I auf γ_v ein striktes lokales Minimum in $t = 0$.

(b) $x = 0 \in \mathbb{R}^2$ ist kein lokaler Minimierer von I, d.h. es gilt $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, y \in B_\varepsilon(0) :\ I(y) \le I(0)$

(*Tip: Betrachte ein I, dass zwischen den Graphen von zwei Parabeln negativ und außerhalb positiv ist.*)