Satz 1. *Seien X ein Hilbertraum, $1 < p < \infty$ und $s \mapsto \mu_s \in \mathrm{Prob}(X)$, $s \in [0,1]$, eine Geodäte mit konstanter Geschwindigkeit bzgl. der Wasserstein-Metrik W_p, dann existiert ein optimaler Transportplan $\boldsymbol{\gamma} \in \mathrm{Prob}(X \times X)$, so dass $\mu_s = (G_s)_\sharp \boldsymbol{\gamma}$, wobei $G_s(x,y) = (1-s)x + sy$ für $x, y \in X$.*

Beweis. Sei $s \in]0,1[$ gegeben. Dann existieren optimale Transportpläne $\boldsymbol{\gamma}^{0,s}$, $\boldsymbol{\gamma}^{s,1} \in \mathrm{Prob}(X \times X)$ für die Paare (μ_0, μ_s) und (μ_s, μ_1). Wir betrachten die Disintegrationen von $\boldsymbol{\gamma}^{0,s}$ und $\boldsymbol{\gamma}^{s,1}$ bzgl. μ_s, d.h. wir schreiben $\boldsymbol{\gamma}^{0,s}(\mathrm{d}x_0, \mathrm{d}\tilde{x}) = \mu_{\tilde{x}}^{0,s}(\mathrm{d}x_0) \otimes \mu_s(\mathrm{d}\tilde{x})$ sowie $\boldsymbol{\gamma}^{s,1}(\mathrm{d}\tilde{x}, \mathrm{d}x_1) = \mu_{\tilde{x}}^{s,1}(\mathrm{d}x_1) \otimes \mu_s(\mathrm{d}\tilde{x})$ für durch $\tilde{x} \in X$ parametrisierte Familien $\mu_{\tilde{x}}^{0,s} \in \mathrm{Prob}(X)$ und $\mu_{\tilde{x}}^{s,1} \in \mathrm{Prob}(X)$.

Wir zeigen zunächst, dass $\boldsymbol{\gamma}^{0,s}$ und $\boldsymbol{\gamma}^{s,1}$ sogar eindeutig sind und durch Transportabbildungen $T^{0,s} : X \to X$ bzw. $T^{s,1} : X \to X$ induziert sind. Dazu definieren wir wie im Beweis der Dreiecksungleichung für die Wasserstein-Metrik den Plan $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Prob}(X \times X \times X)$ über

$$\int_{X \times X \times X} \varphi(x_0, \tilde{x}, x_1) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\beta} = \int_X \int_X \int_X \varphi(x_0, \tilde{x}, x_1) \, \mathrm{d}\mu_{\tilde{x}}^{0,s}(x_0) \mathrm{d}\mu_{\tilde{x}}^{s,1}(x_1) \mathrm{d}\mu_s(\tilde{x})$$

wobei eine beliebige $\varphi : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ Borel-meßbare Funktion ist. Wir überprüfen leicht, dass der Plan $\widehat{\boldsymbol{\gamma}} := \pi_\sharp^{1,3} \boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Prob}(X \times X)$ (hierbei ist $\pi^{1,3}(x_0, \tilde{x}, x_1) = (x_0, x_1)$ die kanonische Projektion auf die erste und dritte Komponente) ein Transportplan für μ_0 und μ_1 ist ($\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ transportiert zunächst μ_0 nach μ_s und dann μ_s nach μ_1, $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ ist die Hintereinanderausführung von $\boldsymbol{\gamma}^{0,s}$ und $\boldsymbol{\gamma}^{s,1}$). Damit gilt nun

$$\begin{aligned} \mathsf{W}_p(\mu_0, \mu_1) &\leq \|x_0 - x_1\|_{\mathrm{L}^p(X \times X; \mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{\gamma}})} = \|x_0 - x_1\|_{\mathrm{L}^p(X \times X \times X; \mathrm{d}\boldsymbol{\beta})} \\ &\leq \|x_0 - \tilde{x}\|_{\mathrm{L}^p(X \times X \times X; \mathrm{d}\boldsymbol{\beta})} + \|\tilde{x} - x_1\|_{\mathrm{L}^p(X \times X \times X; \mathrm{d}\boldsymbol{\beta})} \\ &= \|x_0 - \tilde{x}\|_{\mathrm{L}^p(X \times X; \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}^{0,s})} + \|\tilde{x} - x_1\|_{\mathrm{L}^p(X \times X; \mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}^{s,1})} \\ &= \mathsf{W}_p(\mu_0, \mu_s) + \mathsf{W}(\mu_s, \mu_1) = \mathsf{W}_p(\mu_0, \mu_1) \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Dreiecksungleichung für die L^p-Norm, in der dritten Zeile die Konstruktion von $\boldsymbol{\beta}$ und in der vierten Zeile die Optimalität von $\boldsymbol{\gamma}^{0,s}$ und $\boldsymbol{\gamma}^{s,1}$ und das μ_s eine Geodäte mit konstanter Geschwindigkeit ist. Insbesondere gilt überall Gleichheit und $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ ist ein optimaler Transportplan für μ_0, μ_1.

Da für $p > 1$ die L^p-Norm strikt konvex ist, muss gelten, dass eine Konstante $\alpha > 0$ existiert mit $x_0 - \tilde{x} = \alpha(\tilde{x} - x_1)$ $\boldsymbol{\beta}$-f.ü. (siehe Beweis der Minkowski-Ungleichung für L^p-Räume). Umstellen dieser Identität führt auf

$$\tilde{x} = \frac{1}{1+\alpha} x_0 + \frac{\alpha}{1+\alpha} x_1 = (1-\lambda) x_0 + \lambda x_1, \qquad \boldsymbol{\beta}\text{-f.ü.} \tag{1}$$

mit $\lambda = \alpha/(1+\alpha) \in]0,1[$. Diese Beziehung führt auf

$$\mathsf{W}_p(\mu_0, \mu_s) = \|x_0 - \tilde{x}\|_{\mathrm{L}^p(X \times X \times X; \mathrm{d}\boldsymbol{\beta})} = \lambda \|x_0 - x_1\|_{\mathrm{L}^p(X \times X \times X; \mathrm{d}\boldsymbol{\beta})} = \lambda \mathsf{W}_p(\mu_0, \mu_1).$$

Andererseits gilt $\mathsf{W}_p(\mu_0,\mu_s) = s\mathsf{W}_p(\mu_0,\mu_1)$, so dass $\lambda = s$ folgt.

Wir integrieren nun die Identität $\tilde{x} - x_0 = s(x_1 - x_0)$ bzgl. $\mu_{\tilde{x}}^{0,s}(\mathrm{d}x_0)$ und bzgl. $\mu_{\tilde{x}}^{s,1}(\mathrm{d}x_1)$ und erhalten

$$\tilde{x} - z^{s,1}(\tilde{x}) = s\big(x_1 - z^{s,1}(\tilde{x})\big) \quad \boldsymbol{\gamma}^{s,1}\text{-f.ü.} \qquad \text{und} \qquad \tilde{x} - x_0 = s\big(z^{0,s}(\tilde{x}) - x_0\big) \quad \boldsymbol{\gamma}_{0,s}\text{-f.ü.} \tag{2}$$

wobei $z^{0,s}(\tilde{x}) := \int_X x_1 \mathrm{d}\mu_{\tilde{x}}^{s,1}(x_1)$ und $z^{s,1}(\tilde{x}) := \int_X x_0 \mathrm{d}\mu_{\tilde{x}}^{0,s}(x_0)$ die Schwerpunkte (Baryzentren) der Maße $\mu_{\tilde{x}}^{0,s}$ und $\mu_{\tilde{x}}^{s,1}$ sind.

Die Gleichungen in (2) definieren Transportabbildungen $T^{0,s} : X \to X$ bzw. $T^{s,1} : X \to X$ mit

$$x_0 = T^{0,s}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x} - sz^{0,s}(\tilde{x})}{1-s}, \qquad x_1 = T^{s,1}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x} - z^{s,1}(\tilde{x})}{s} + z^{s,1}(\tilde{x}),$$

so dass $\boldsymbol{\gamma}^{0,s} = (T^{0,s}, \tilde{x})_\sharp \mu_s$ und $\boldsymbol{\gamma}^{s,1} = (\tilde{x}, T^{s,1})_\sharp \mu_s$.

Da $T^{0,s}$ nur von $\mu_{\tilde{x}}^{s,1}$ bzw. von $\boldsymbol{\gamma}^{s,1}$ abhängt, und $\boldsymbol{\gamma}^{0,s}$ unabhängig von $\boldsymbol{\gamma}^{s,1}$ gewählt wurde, muss $\boldsymbol{\gamma}^{0,s}$ der eindeutige optimale Transportplan für μ_0 und μ_s sein. Analog ist $\boldsymbol{\gamma}^{s,1}$ der eindeutige Transportplan für μ_s und μ_1.

Letztendlich zeigen wir $\mu_s = (G_s)_\sharp \widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ mit $G_s(x_0,x_1) = (1-s)x_0 + sx_1$. Sei dazu $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine beliebige Borel-meßbare Funktion. Wir folgern

$$\begin{aligned}\int_X \varphi(\tilde{x})\mathrm{d}(G_s)_\sharp \widehat{\boldsymbol{\gamma}} = \int_{X\times X} \varphi\big((1-s)x_0 + sx_1\big)\mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{\gamma}} &= \int_{X\times X\times X} \varphi\big((1-s)x_0 + sx_1\big)\mathrm{d}\boldsymbol{\beta} \\ &\overset{(1)}{=} \int_{X\times X\times X} \varphi(\tilde{x})\mathrm{d}\boldsymbol{\beta} = \int_X \varphi(\tilde{x})\mathrm{d}\mu_s,\end{aligned}$$

das heißt es gilt $\mu_s = (G_s)_\sharp \widehat{\boldsymbol{\gamma}}$.

□