

Bipolar Poisson MANET Modell

Etienne Rolly

Technische Universität Berlin

10.07.2015

Inhaltsverzeichnis

Das bipolare Poisson MANET Modell

Einführung

Überdeckungswahrscheinlichkeit

Shannon Durchsatz

Optimierung der Überdeckungswahrscheinlichkeit und des Durchsatzes

Optimierung der Fortschrittsdichte

Optimierung der Transportdichte

Spatial Reuse im optimierten MANET

Das Poisson bipolare MANET Modell mit Aloha MAC

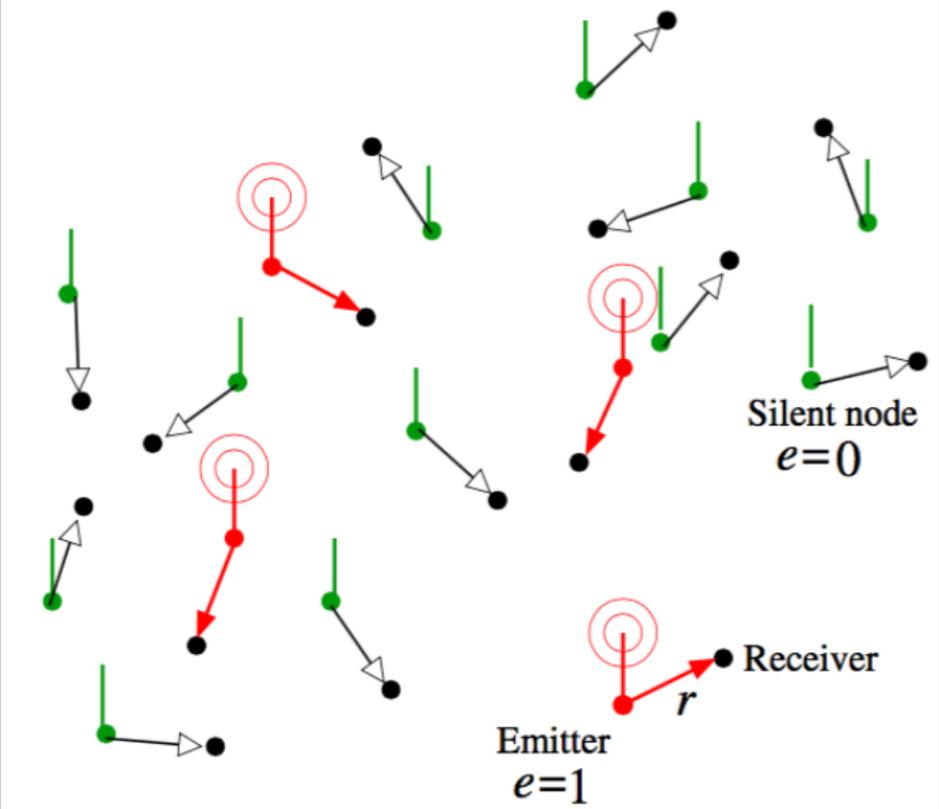
- ▶ Betrachte die Punkte eines homogenen PPP als potentielle Sender. Diese haben unendlich viele Informationen zu senden und besitzen jeweils einen eigenen Empfänger im Abstand r , der nicht Teil des PPP ist.
- ▶ Es gilt Aloha MAC, d.h. Jeder Knoten X_i darf (unabhängig) mit Wahrscheinlichkeit p (MAP) senden.
- ▶ Diese Momentaufnahme wird durch einen unabhängigen, markierten PPP (u.m.) beschrieben, wobei der PPP mit Intensität λ homogen im \mathbb{R}^2 ist und die Markierung auf jedem Punkt Informationen über Empfänger, MAP und Fading enthält.

Das Poisson bipolare MANET Modell mit Aloha MAC

Sei $\tilde{\Phi} = \{(X_i, e_i, y_i, \mathbf{F}_i)\}$ der u.m. PPP, dabei ist

- ▶ $\Phi = \{X_i\}$ die Position der Sender, welche durch einen homogenen PPP zum Parameter $0 < \lambda < \infty$ erzeugt werden.
- ▶ $\{y_i\}$ der Position des eindeutigen Empfängers von X_i im Abstand $|X_i - y_i| = r$.
- ▶ $\{e_i\}$ der Sendeindikator. Falls $e_i = 1$ darf gesendet werden, falls $e_i = 0$ darf nicht gesendet werden. Es gilt: $\mathbb{P}(e_i = 1) = p$.
- ▶ $\{\mathbf{F}_i = (F_i^j : j)\}$ die virtuelle Signalstärke ausgehend vom Sender X_i beim Empfänger y_j . Sie ist das Produkt aus effektiver Signalstärke des Punktes X_i und eines zufälligen Fadings. Annahme: Die $\{\mathbf{F}_i\}$ seien u.i.v. und die einzelnen Komponenten $(F_i^j : j)$ seien identisch verteilte ZV (also verteilt wie eine ZV F , häufig exponentialverteilt).

Momentaufnahme eines bipolaren MANET mit Aloha MAC



Weitere Annahmen

- ▶ W sei das Wärmerauschen und unabhängig zu $\tilde{\Phi}$.
- ▶ $\Phi^1 = \{X_i : e_1 = 1\}$ ist ein PPP mit Intensität $\lambda_1 = \lambda\rho$.
- ▶ $I(u)$ sei die Streckendämpfung, wobei wir ausschließlich das Modell

$$I(u) = (A \cdot u)^\beta, \quad A > 0, \beta > 2$$

bzw. *OPL3* (omni-directional path-loss) verwenden werden.

- ▶ Damit ergibt sich für die Signalstärke, welche ausgehend vom Punkt/Sender X_i beim Punkt/Empfänger y_j ankommt als:

$$F_i^j / I(|X_i - y_j|).$$

Überdeckungswahrscheinlichkeit

Definition

Der Sender X_i überdeckt den Empfänger y_i im entsprechenden Zeitintervall, falls

$$SINR_i = \frac{F_i^i / l(|X_i - y_i|)}{W + I_i^1} > T, \quad (1)$$

wobei W das Wärmerauschen, $I_i^1 = \sum_{X_j \in \tilde{\Phi}^1, j \neq i} F_j^i / l(|X_j - y_i|)$ die Interferenz zum Knoten i und T eine beliebige, feste Grenze für den SINR ist.

Wir erweitern nun unseren u.m. PPP mit δ_i , wobei $\delta_i = 1$ ist, falls Ungleichung (1) erfüllt ist, andernfalls gilt $\delta_i = 0$.

$$\implies \tilde{\Phi} = \{(X_i, e_i, y_i, F_i, \delta_i)\}$$

Überdeckungswahrscheinlichkeit

Definition (Überdeckungswahrscheinlichkeit)

Als Überdeckungswahrscheinlichkeit eines gewöhnlichen Knoten, falls dieser senden darf, bezeichnen wir

$$p_c(r, \lambda_1, T) = \mathbb{P}^0(\delta_0 = 1 | e_0 = 1) = \mathbb{E}^0(\delta_0 | e_0 = 1),$$

wobei \mathbb{P}^0 die Palm-Wahrscheinlichkeit bzgl. $\tilde{\Phi}$ und δ_0 die Markierung von $X_0 = 0$ \mathbb{P}^0 -f.s. ist.

Die Palm-Wahrscheinlichkeit (für stationierte, markierte PP) wird beschrieben durch

$$\mathbb{P}^0(\delta_0 = 1 | e_0 = 1) = \frac{1}{\lambda_1 \cdot |B|} \cdot \mathbb{E} \left(\sum_i e_i \delta_i \mathbf{1}_{\{X_i \in B\}} \right),$$

wobei der Erwartungswert die erwartete Anzahl der erfolgreichen, erlaubten Übertragungen in B und der Faktor davor die erwartete Anzahl aller erlaubten Übertragungen in B angibt.

Überdeckungswahrscheinlichkeit

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} p_c(r, \lambda_1, T) &= \mathbb{P}^0(F_0^0 > Tl(r)(W + I_0^1) | e_0 = 1) \\ &= \mathbb{P}(F \geq Tl(r)(W + I^1)), \end{aligned}$$

wobei $I^1 = \sum_{X_j \in \tilde{\Phi}^1} F_j / l(|X_j|)$.

Wir betrachten also ein $\frac{G}{W+M/G}$ SINR Modell bzgl. des PPP $\tilde{\Phi}^1$ mit Intensität λ_1 . Also mit allgemeiner Verteilung (GI) der virtuellen Signalstärke sowie dem Shot-Noise Modell mit PPP und allgemeiner Verteilung der virtuellen Signalstärke der Störsender (M/GI).

Überdeckungswahrscheinlichkeit

Die Laplace-Transformation (von I^1) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{I^1}(s) &= \mathbb{E}(e^{-sI^1}) \\ &= \exp\left(-2\pi\lambda_1 \int_0^\infty t(1 - \mathcal{L}_F(s/I(t)))dt\right) \\ &\stackrel{F \sim \text{Exp}_\mu}{=} \exp\left(-2\pi\lambda_1 \int_0^\infty t \cdot \underbrace{(1 - \mathcal{L}_F(s/I(t)))}_{=1 - \mu/(\mu + s/I(t)) = \frac{1}{1 + \mu I(t)/s}} dt\right) \\ &= \exp\left(-2\pi\lambda_1 \int_0^\infty \frac{t}{1 + \frac{\mu I(t)}{s}} dt\right).\end{aligned}$$

Überdeckungswahrscheinlichkeit mit Rayleigh Fading

Ist $F \sim \text{Exp}_\mu$, so gilt:

$$\begin{aligned} p_c(r, \lambda_1, T) &= \mathbb{P}(F \leq Tl(r)(W + I^1)) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-\mu Tl(r)(W + I^1)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-\mu Tl(r)W} \right) \cdot \mathbb{E} \left(e^{-\mu Tl(r)I^1} \right) \\ &= \mathcal{L}_W(\mu Tl(r)) \cdot \mathcal{L}_{I^1}(\mu Tl(r)) \\ &= \mathcal{L}_W(\mu Tl(r)) \cdot \exp \left(-2\pi\lambda_1 \int_0^\infty \frac{t}{1 + \frac{l(t)}{Tl(r)}} dt \right). \end{aligned}$$

Überdeckungswahrscheinlichkeit mit Rayleigh Fading

Theorem

Im $\frac{M}{W+M/M}$ bipolar Modell, also mit Rayleigh-Fading, gilt:

$$p_c(r, \lambda_1, T) = \mathcal{L}_W(\mu T I(r)) \cdot \exp \left(-2\pi\lambda_1 \int_0^\infty \frac{t}{1 + \frac{I(t)}{T I(r)}} dt \right).$$

Falls $W \equiv 0$ und OPL3 gilt insbesondere:

$$\begin{aligned} p_c(r, \lambda_1, T) &= \exp \left(-2\pi\lambda_1 \int_0^\infty \frac{t}{1 + \frac{t^\beta}{T r^\beta}} dt \right) \\ &= \exp \left(-2\pi\lambda_1 r^2 T^{2/\beta} \cdot \overbrace{\frac{\Gamma(2/\beta)\Gamma(1-2/\beta)}{\beta}}^{=\pi/\sin(\pi 2/\beta)} \right) \\ &= \exp \left(-\frac{2\pi^2\lambda_1 r^2 T^{2/\beta}}{\beta \sin(\pi 2/\beta)} \right). \end{aligned}$$

Überdeckungswahrscheinlichkeit mit allgemeinem Fading

Theorem

Falls für ein $\frac{GI}{W+M/GI}$ bipolares Modell mit allgemeinem Fading F gilt:

- ▶ $\mathbb{E}(F) < \infty$ und es existiert eine quadratisch integrierbare Dichte zu F sowie
- ▶ entweder hat I^1 oder W eine quadratisch integrierbare Dichte,

dann folgt für die Überdeckungswahrscheinlichkeit:

$$p_c(r, \lambda_1, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{I^1}(2i\pi l(r)Ts) \cdot \mathcal{L}_W(2i\pi l(r)Ts) \cdot \frac{\mathcal{L}_F(-2i\pi s) - 1}{2i\pi s} ds.$$

Überdeckungswahrscheinlichkeit mit allgemeinem Fading

Beweis.

Durch die Unabhängigkeit von I^1 und W impliziert die zweite Annahme, dass $(I^1 + W)$ eine quadratisch integrierbare Dichte besitzt. Nun folgt das Ergebnis aus

$$p_c(r, \lambda_1, T) = \mathbb{P}((I^1 + W)TI(r) < F)$$

mittels des Satzes von Plancherel-Parseval (vgl. Bremaud 2002, Satz. C3.3, Seite 157) und für weitere Details siehe Korollar 12.2.2 in Vol. 1. □

Shannon Durchsatz

Mit Hilfe des Shannon-Hartley-Gesetzes erhalten wir die **maximal erreichbare, fehlerfreie Datenübertragung** (also Kapazität in Bits/Sekunde) im gestörten Kanal:

$$C = B \cdot \log_2(1 + \text{SINR}).$$

Definition (Durchsatz)

Wir definieren den (Shannon) Durchsatz (bzw. Bitrate) eines Kanals vom Sender X_i zu seinem Empfänger y_i als

$$\mathcal{T}_i = \log(1 + \text{SINR}_i),$$

wobei SINR_i wie in (1) definiert ist.

Shannon Durchsatz

Der Durchsatz eines typischen Senders bzw. der Durchschnitt der Bitraten aller Sender kann nun beschrieben werden als

$$\begin{aligned}\tau(r, \lambda_1) &= \mathbb{E}^0(\mathcal{T}_0 \mid e_0 = 1) \\ &= \mathbb{E}^0(\log(1 + \text{SINR}_0) \mid e_0 = 1) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}^0(\log(1 + \text{SINR}_0) > t \mid e_0 = 1) dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}^0(\text{SINR}_0 > e^t - 1 \mid e_0 = 1) dt \\ &= \int_0^\infty p_c(r, \lambda_1, e^t - 1) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{p_c(r, \lambda_1, v)}{v + 1} dv.\end{aligned}$$

Shannon Durchsatz

Für die Laplace-Transformation gilt analog:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{T}}(s) &= \mathbb{E}^0(e^{-s\mathcal{T}_0} | e_0 = 1) \\ &= \mathbb{E}^0((1 + \text{SINR}_0)^{-s} | e_0 = 1) \\ &= 1 - \int_0^1 p_c(r, \lambda_1, t^{-1/s} - 1) dt \\ &= 1 - s \int_0^\infty \frac{p_c(r, \lambda_1, v)}{(1+v)^{1+s}} dv.\end{aligned}$$

Shannon Durchsatz mit Rayleigh Fading

Korollar

Mit Rayleigh-Fading und OPL3 gilt für den Shannon Durchsatz bzw. dessen Laplace-Transformation:

$$\tau(r, \lambda_1) = \frac{\beta}{2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 K(\beta) r^2 v} \cdot \frac{v^{\beta/2-1}}{1+v^{\beta/2}} \cdot \mathcal{L}_W \left(\mu(Ar)^\beta v^{\beta/2} \right) dv$$

bzw.

$$\mathcal{L}_T(s) = \frac{\beta s}{2} \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\lambda_1 K(\beta) r^2 v} \cdot \frac{v^{\beta/2-1}}{(1+v^{\beta/2})^{1+s}} \cdot \mathcal{L}_W \left(\mu(Ar)^\beta v^{\beta/2} \right) \right) dv,$$

wobei $K(\beta) = (2\pi^2)/(\beta \sin(2\pi/\beta))$ ist.

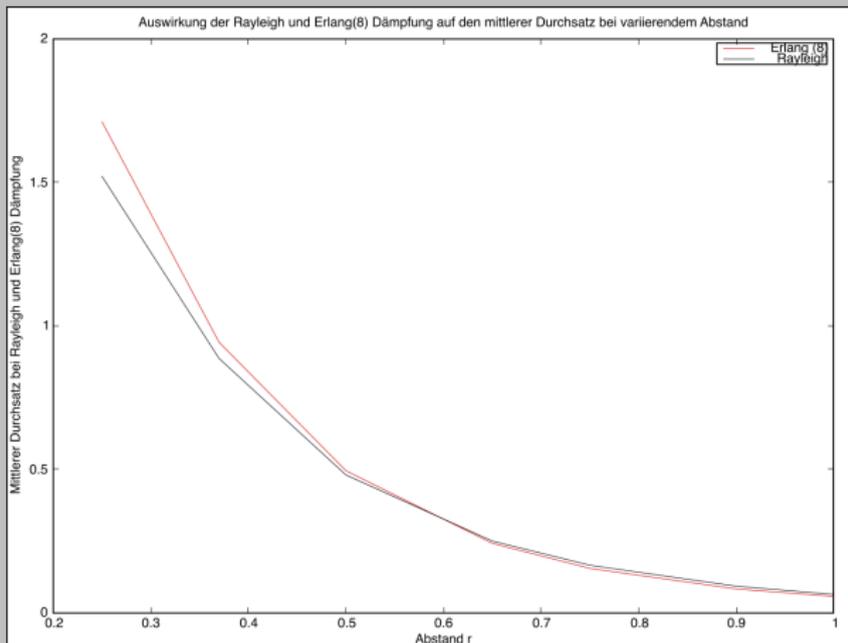
Shannon Durchsatz mit Rayleigh Fading

Beweis

$$\begin{aligned}\tau(r, \lambda_1) &= \int_0^\infty \frac{p_c(r, \lambda, \nu)}{\nu + 1} d\nu \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\nu + 1} \mathcal{L}_W(\mu\nu(Ar)^\beta) \cdot \exp\left(-2\pi\lambda_1 \int_0^\infty \frac{t}{1 + \frac{t^\beta}{\nu r^\beta}} dt\right) d\nu \\ &= \frac{\beta}{2} \int_0^\infty \frac{\nu^{\beta/2-1}}{1 + \nu^{\beta/2}} \cdot \exp\left(-2\pi\lambda_1 \int_0^\infty \frac{t}{1 + \left(\frac{t}{\nu^{1/2}r}\right)^\beta} dt\right) \\ &\quad \cdot \mathcal{L}_W(\mu\nu^{\beta/2}(Ar)^\beta) d\nu \\ &= \frac{\beta}{2} \int_0^\infty e^{-\lambda_1 K(\beta)r^2\nu} \cdot \frac{\nu^{\beta/2-1}}{1 + \nu^{\beta/2}} \cdot \mathcal{L}_W(\mu(Ar)^\beta \nu^{\beta/2}) d\nu.\end{aligned}$$

Beispiel zum Shannon Durchsatz

Für OPL3 mit $A = 1$ und $\beta = 4$, $W \sim Exp_{100}$ sowie $F_{Ray} \sim Exp_1$ und $\mathbb{E}(F_{Erl}) = 1$ erhalten wir $\tau(r, \lambda_1)$:



	$r = .25$	$r = .37$	$r = .5$	$r = .65$	$r = .75$	$r = .9$	$r = 1$
Rayleigh	1.52	.886	.480	.250	.166	.0930	.0648
Erlang (8)	1.71	.942	.495	.242	.155	.0832	.0571

Inhaltsverzeichnis

Das bipolare Poisson MANET Modell

Einführung

Überdeckungswahrscheinlichkeit

Shannon Durchsatz

Optimierung der Überdeckungswahrscheinlichkeit und des Durchsatzes

Optimierung der Fortschrittsdichte

Optimierung der Transportdichte

Spatial Reuse im optimierten MANET

Vorüberlegungen zur Optimierung von $p_c(r, \lambda_1, T)$ und $\tau(r, \lambda_1)$

⇒ Um bezüglich des Abstand r zu optimieren betrachten wir die abstandsabhängigen Größen:

- ▶ den erwarteten Fortschritt einer typischen Übertragung

$$prog(r, \lambda_1, T) = r \cdot \mathbb{E}^0(\delta_0) = r \cdot p_c(r, \lambda_1, T)$$

- ▶ den erwarteten Transport einer typischen Übertragung

$$trans(r, \lambda_1, T) = r \cdot \mathbb{E}^0(\mathcal{T}_0) = r \cdot \tau(r, \lambda_1),$$

wobei $\lambda_1 = \lambda p$.

⇒ Um zusätzlich bezüglich der MAP p zu optimieren definieren wir:

1. **Dichte der erfolgreichen Übertragungen** (oder auch erwartete Anzahl erfolgreicher Übertragungen in einem beliebigen Gebiet B). Wir erinnern, dass $\Phi = \{X_i\}$ und mithilfe von $g(x, \Phi) = \mathbf{1}_{\{x \in B\}} e_0 \delta_0$ sowie Campbells Formula gilt:

$$\begin{aligned}d_{suc}(r, \lambda_1, T) &= \frac{1}{|B|} \cdot \mathbb{E} \left(\sum_i e_i \delta_i \mathbf{1}_{(X_i \in B)} \right) \\&= \frac{1}{|B|} \cdot \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}^2} g(x, \tilde{\Phi} - x) \Phi(dx) \right) \\&= \frac{1}{|B|} \cdot \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}^0(g(x, \tilde{\Phi})) dx \\&= \lambda_1 \mathbb{E}^0(e_0 \delta_0) = \lambda_1 \cdot p_c(r, \lambda_1, T).\end{aligned}$$

2. **Dichte des Fortschritts** (oder die gesamte erwartete Distanz aller Übertragungen in einem Gebiet B):

$$\begin{aligned}d_{prog}(r, \lambda_1, T) &= \frac{1}{|B|} \cdot \mathbb{E} \left(\sum_i r e_i \delta_i \mathbf{1}_{(X_i \in B)} \right) \\&= r \lambda_1 \cdot p_c(r, \lambda_1, T).\end{aligned}$$

3. **Dichte des Durchsatzes** (oder der erwartete Durchsatz pro Gebiet B):

$$\begin{aligned}d_{throu}(r, \lambda_1) &= \frac{1}{|B|} \cdot \mathbb{E} \left(\sum_i e_i \mathbf{1}_{(X_i \in B)} \log(1 + \text{SINR}_i) \right) \\ &= \lambda_1 \cdot \tau(r, \lambda_1).\end{aligned}$$

4. **Dichte des Transports** (oder die erwartete Anzahl an Bitmetern pro Sekunde und pro Gebiet B):

$$\begin{aligned}d_{trans}(r, \lambda_1) &= \frac{1}{|B|} \cdot \mathbb{E} \left(\sum_i r e_i \mathbf{1}_{(X_i \in B)} \log(1 + \text{SINR}_i) \right) \\ &= r \lambda_1 \cdot \tau(r, \lambda_1).\end{aligned}$$

Optimierung der Fortschrittsdichte d_{prog} bzw. d_{suc}

(Gesucht: p_{max} , Gegeben: r)

Sei

$$\lambda_{max} = \operatorname{argmax}_{0 \leq \lambda \leq \infty} d_{suc}(r, \lambda, T).$$

Theorem

Im $\frac{M}{W+M/M}$ Modell mit $p = 1$ wird das Maximum von $d_{suc} = \lambda p_c(r, \lambda, T)$ angenommen für:

$$\lambda_{max} = \left(2\pi \int_0^\infty \frac{u}{1 + I(u)/(TI(r))} du \right)^{-1}$$

und daraus folgt

$$d_{suc}(r, \lambda_{max}, T) = e^{-1} \lambda_{max} \cdot \mathcal{L}_W(\mu TI(r)).$$

Insbesondere gilt für $W \equiv 0$ und OPL3:

$$\lambda_{max} = \frac{1}{K(\beta)r^2 T^{2/\beta}}, \quad d_{suc}(r, \lambda_{max}, T) = \frac{1}{eK(\beta)r^2 T^{2/\beta}}.$$

Optimierung der Prozessdichte d_{prog} bzw. d_{suc}

(Gesucht: p_{max} , Gegeben: r)

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} \lambda p_c(r, \lambda, T) &= \frac{d}{d\lambda} \lambda \cdot \mathcal{L}_W(\mu Tl(r)) \cdot \exp\left(-2\pi\lambda \int_0^\infty \frac{t}{1 - \frac{l(t)}{Tl(r)}} dt\right) \\ &= p_c(r, \lambda, T) + \lambda \left(-2\pi \int_0^\infty \frac{u}{1 + l(u)/(Tl(r))} du\right) p_c(r, \lambda, T) \\ &\stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

Also

$$\lambda_{max} = \left(2\pi \int_0^\infty \frac{u}{1 + l(u)/(Tl(r))} du\right)^{-1}.$$

□

Optimierung der Prozessdichte d_{prog} bzw. d_{suc}

(Gesucht: p_{max} , Gegeben: r)

Korollar

Im $\frac{M}{W+M/M}$ Modell mit gegebenem Abstand r und $\lambda_1 = \lambda_{max} = \lambda p$ maximiert folgender MAP p die Dichte der erfolgreichen Übertragungen d_{suc} :

$$p_{max} = \min(1, \lambda_{max}/\lambda).$$

Theorem

Im $\frac{GI}{0+M/GI}$ bipolaren Modell mit OPL3 und $W \equiv 0$ gilt

$$\lambda_{max} = \frac{const_1}{r^2 T^{2/\beta}}, \quad d_{suc}(r, \lambda_{max}, T) = \frac{const_2}{r^2 T^{2/\beta}},$$

wobei die Konstanten $const_1$ und $const_2$ nicht von r , T oder μ abhängen
- vorausgesetzt λ_{max} ist wohldefiniert.

Optimierung der Prozessdichte d_{prog} bzw. d_{suc}

(Gesucht: r_{max} , Gegeben: λ_1)

Seien

$$r_{max}(\lambda) = \underset{0 \leq \lambda \leq \infty}{argmax} \text{ prog}(r, \lambda, T) \quad \& \quad \rho_{max}(\lambda) = \text{ prog}(r_{max}(\lambda), \lambda, T).$$

Theorem

Im $\frac{GI}{0+M/GI}$ bipolaren Modell mit OPL3 und $W \equiv 0$ gilt:

$$r_{max}(\lambda) = \frac{const_3}{T^{1/\beta} \sqrt{\lambda}}, \quad \rho_{max}(\lambda) = \frac{const_4}{T^{1/\beta} \sqrt{\lambda}},$$

wobei beide Konstanten unabhängig von r , T und μ sind.

Gilt weiterhin, dass $F \sim Exp$ sowie OPL3, dann folgt

$$const_3 = \frac{1}{\sqrt{2K(\beta)}}, \quad const_4 = \frac{1}{\sqrt{2eK(\beta)}}.$$

Diskussion Teil 1

Sei $W \equiv 0$ und $OPL3$, dann folgt mit dem ersten Unterunterkapitel, dass das Maximum von d_{suc} für die Dichte der Sender $\lambda_{max} = const_1 / (r^2 T^{2/\beta})$ angenommen wird. Desweiteren gilt aber mit Theorem 2.3:

$$\begin{aligned} \sup_{r \geq 0} prog(r, \lambda_{max}, T) &= \sup_{r \geq 0} r \cdot p_c(r, \lambda_{max}, T) \\ &= \sup_{r \geq 0} r \frac{d_{suc}(r, \lambda_{max}, T)}{\lambda_{max}} \\ &= \sup_{r \geq 0} r \frac{const_2}{const_1} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Das Maximum wird also angenommen für $r = \infty$ und damit $\lambda_{max} = 0$.

Diskussion Teil 2

Andere Idee: Optimiere $d_{prog} = \lambda r \cdot p_c(r, \lambda, T)$ erst nach λ und dann nach r . Eine Optimierung nach λ gibt uns λ_{max} und damit gilt

$$\begin{aligned}\sup_{r \geq 0} d_{prog}(r, \lambda_{max}, T) &= \sup_{r \geq 0} r \cdot d_{suc}(r, \lambda_{max}, T) \\ &= \sup_{r \geq 0} r \cdot \frac{const_2}{r^2 T^{2/\beta}} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Hier wird also das Maximum bei $r = 0$ angenommen, woraus $\lambda_{max} = \infty$ folgt.

Optimierung der Transportdichte d_{trans}

(Gesucht: p_{max} , Gegeben: r)

Sei

$$\lambda_{max}^{trans} = \operatorname{argmax}_{0 \leq \lambda \leq \infty} d_{trans}(r, \lambda).$$

Theorem

Im $\frac{M}{0+M/M}$ bipolaren Modell und OPL3 wird das eindeutige Maximum von $d_{trans}(r, \lambda) = r\lambda_1 \cdot \tau(r, \lambda_1)$ angenommen für

$$\lambda_{max}^{trans} = \frac{x^*(\beta)}{r^2 K(\beta)},$$

wobei $x^*(\beta)$ die eindeutige Lösung von

$$\int_0^\infty e^{-xv} \cdot \frac{v^{\beta/2-1}}{1+v^{\beta/2}} dv = x \int_0^\infty e^{-xv} \cdot \frac{v^{\beta/2}}{1+v^{\beta/2}} dv$$

ist.

Optimierung der Transportdichte d_{trans}

(Gesucht: r_{max} , Gegeben: λ_1)

Sei

$$r_{max}^{trans}(\lambda) = \operatorname{argmax}_{r \geq 0} r \cdot \tau(r, \lambda).$$

Theorem

Im $\frac{M}{0+M/M}$ bipolaren Modell mit OPL3 wird das eindeutige Maximum von $d_{trans} = r\lambda_1 \cdot \tau(r, \lambda_1)$ angenommen in

$$r_{max}^{trans}(\lambda) = \sqrt{\frac{y^*(\beta)}{\lambda K(\beta)}},$$

wobei $y^*(\beta)$ die eindeutige Lösung von

$$\int_0^\infty e^{-yv} \cdot \frac{v^{\beta/2-1}}{1+v^{\beta/2}} dv = 2y \int_0^\infty e^{-yv} \cdot \frac{v^{\beta/2}}{1+v^{\beta/2}} dv$$

ist.

Spatial Reuse

Definition

Der erwartete ausschließende Radius ist

$$R_{\text{excl}} = \mathbb{E}^0(\min_{i \neq 0} \{ |X_i| : e_i = 1 \}).$$

Theorem

Im $\frac{GI}{W+M/GI}$ bipolaren Modell gilt:

$$R_{\text{excl}}(\lambda_1) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}}.$$

Beweis

$$\begin{aligned} R_{\text{excl}}(\lambda_1) &= \int_0^\infty e^{-\lambda_1 \pi s^2} ds \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda_1 \pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}}. \end{aligned}$$

Spatial Reuse

Fragen bezüglich des erwarteten ausschließenden Radius:

- ▶ Falls r gegeben und p optimiert ist, wie verhält sich R_{excl} zu r ?
- ▶ Falls λ gegeben und r optimiert ist, wie verhält sich r zu R_{excl} ?

Definition (Spatial Reuse Faktor)

Falls die Intensität der Sender im Aloha MANET Modell gleich λ_1 ist, gilt für den Spatial Reuse Faktor:

$$S_{Reuse}(\lambda_1, r) = \frac{r}{R_{excl}} = 2r\sqrt{\lambda_1}.$$

Beispiel 1 zum Spatial Reuse Faktor

Es gelte im bipolaren Poisson MANET Modell mit Rayleigh Fading und OPL3, dass $W = 0$ ist. Außerdem sei der der Shannon Durchsatz bei festem Abstand r optimiert, wodurch gilt:

$$\lambda_{max}^{trans} = \frac{x^*(\beta)}{r^2 K(\beta)}.$$

Damit folgt

$$R_{excl} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{K(\beta)}{x^*(\beta)}} \quad \text{bzw.} \quad S_{Reuse} = \frac{r}{R_{excl}} = 2 \sqrt{\frac{x^*(\beta)}{K(\beta)}}.$$

→ Für $\beta = 4$ gilt: $R_{excl} \approx 1.27r$ und $S_{Reuse} \approx 0.79$.

Beispiel 2 zum Spatial Reuse Faktor

Betrachten wir nun das gleiche Modell wie eben, aber setzen λ fest und maximieren bezüglich des Abstands r , so gilt

$$r_{max}^{trans} = \sqrt{\frac{y^*(\beta)}{\lambda K(\beta)}}.$$

Und damit folgt

$$R_{excl} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \quad \text{bzw.} \quad S_{Reuse} = \frac{r_{max}^{trans}}{R_{excl}} = 2\sqrt{\frac{y^*(\beta)}{K(\beta)}}.$$

→ Für $\beta = 4$ gilt: $y^*(\beta) \approx 0.122$ und $S_{Reuse} \approx 0.314$.

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!