Weierstraß-Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik

Leibniz-Gemeinschaft

Murphys Gesetz, tippende Affen und Unendlichkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wolfgang König (WIAS und TU Berlin)

Ein bekannter Stoßseufzer:

Murphy's Law

Alles, was schiefgehen kann, geht auch schief.

- wird dem amerikanischen Ingenieur EDWARD A. MURPHY jr zugeschrieben
- eigentlich auf menschliches Versagen oder Fehler in komplexen Systemen bezogen
- hat viele bekannte und unbekannte Vorläufer
- hat viele Varianten
- wurde immer wieder versucht, in die wissenschaftliche Welt zu ziehen
- ist wegen des ausgeprägten Pessimismus vor allem psychologisch interessant

Ein bekannter Stoßseufzer:

Murphy's Law

Alles, was schiefgehen kann, geht auch schief.

- wird dem amerikanischen Ingenieur Edward A. Murphy jr zugeschrieben
- eigentlich auf menschliches Versagen oder Fehler in komplexen Systemen bezogen
- hat viele bekannte und unbekannte Vorläufer
- hat viele Varianten
- wurde immer wieder versucht, in die wissenschaftliche Welt zu ziehen
- ist wegen des ausgeprägten Pessimismus vor allem psychologisch interessant

... kann aber auf sichere mathematische Basis gestellt werden!

Ein bekannter Stoßseufzer:

Murphy's Law

Alles, was schiefgehen kann, geht auch schief.

- wird dem amerikanischen Ingenieur EDWARD A. MURPHY jr zugeschrieben
- eigentlich auf menschliches Versagen oder Fehler in komplexen Systemen bezogen
- hat viele bekannte und unbekannte Vorläufer
- hat viele Varianten
- wurde immer wieder versucht, in die wissenschaftliche Welt zu ziehen
- ist wegen des ausgeprägten Pessimismus vor allem psychologisch interessant

... kann aber auf sichere mathematische Basis gestellt werden!

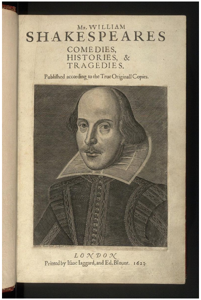
... und zwar mit Hilfe von ein wenig Wahrscheinlichkeitstheorie.

Ein Affe auf der Schreibmaschine

Ein Affe tippt auf einer Schreibmaschine.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit schreibt er dabei Shakespeares Gesammelte Werke auf?

Quelle:
`TotallyFreeImages.com/374260`



Wichtig:

Er schreibt unendlich lange, er benutzt jede Taste, und er setzt jeden Anschlag zufällig und unabhängig auf irgendeine Taste.

Sind Sie ein guter Zufallsgenerator?

Schreiben Sie tausend Nullen oder Einsen auf, so dass alle tausend Zahlen zufällig und unabhängig sind und jede Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Null oder Eins ist.

Wie kann ich testen, ob Sie ein guter Zufallsgenerator sind?

Diese tausend Zahlen sollten alle Eigenschaften haben, die tausend solche Zufallszahlen haben, also solten z.B. die Anzahl der Nullen und Einsen sollte in etwa 500 betragen (GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN) mit Abweichungen der Größenordnung $\sqrt{1000}$ (ZENTRALER GRENZWERTSATZ).

Sind Sie ein guter Zufallsgenerator?

Schreiben Sie tausend Nullen oder Einsen auf, so dass alle tausend Zahlen zufällig und unabhängig sind und jede Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Null oder Eins ist.

Wie kann ich testen, ob Sie ein guter Zufallsgenerator sind?

Diese tausend Zahlen sollten alle Eigenschaften haben, die tausend solche Zufallszahlen haben, also solten z.B. die Anzahl der Nullen und Einsen sollte in etwa 500 betragen (GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN) mit Abweichungen der Größenordnung $\sqrt{1000}$ (ZENTRALER GRENZWERTSATZ).

Psychologie:

Oft aber stellt der “menschliche Zufallsgenerator” einen ständigen Ausgleich her, lässt also keine langen Runs zu.
Dies kann ich als Grundlage für meinen Test nehmen.

Sind Sie ein guter Zufallsgenerator?

Schreiben Sie tausend Nullen oder Einsen auf, so dass alle tausend Zahlen zufällig und unabhängig sind und jede Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Null oder Eins ist.

Wie kann ich testen, ob Sie ein guter Zufallsgenerator sind?

Diese tausend Zahlen sollten alle Eigenschaften haben, die tausend solche Zufallszahlen haben, also solten z.B. die Anzahl der Nullen und Einsen sollte in etwa 500 betragen (GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN) mit Abweichungen der Größenordnung $\sqrt{1000}$ (ZENTRALER GRENZWERTSATZ).

Psychologie:

Oft aber stellt der “menschliche Zufallsgenerator” einen ständigen Ausgleich her, lässt also keine langen Runs zu.
Dies kann ich als Grundlage für meinen Test nehmen.

Aber wie lang sollte der längste Einsen-Run sein?

Der längste Einsen-Run in tausend Zufallszahlen

Sei eine Serie von n unabhängigen, identisch verteilten (u.i.v.) Zahlen 0 oder 1 gegeben, wo beide jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

Faustregel: Es sollte ein Einsen-Run der Länge $\approx \log_2(n)$ auftreten.

Denn ein Einsen-Run der Länge $\geq k$ tritt mit Wahrscheinlichkeit 2^{-k} auf und hat ungefähr n Plätze, an denen er beginnen kann.
Wenn ich also k so bestimme, dass $2^{-k} = n$, dann kann ich einen Einsen-Run der Länge k erwarten.

Bei tausend Zufallszahlen sollte also ein Einsen-Run der Länge zehn auftreten, denn $2^{10} = 1024$.

Der längste Einsen-Run in tausend Zufallszahlen

Sei eine Serie von n unabhängigen, identisch verteilten (u.i.v.) Zahlen 0 oder 1 gegeben, wo beide jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

Faustregel: Es sollte ein Einsen-Run der Länge $\approx \log_2(n)$ auftreten.

Denn ein Einsen-Run der Länge $\geq k$ tritt mit Wahrscheinlichkeit 2^{-k} auf und hat ungefähr n Plätze, an denen er beginnen kann.
Wenn ich also k so bestimme, dass $2^{-k} = n$, dann kann ich einen Einsen-Run der Länge k erwarten.

Bei tausend Zufallszahlen sollte also ein Einsen-Run der Länge zehn auftreten, denn $2^{10} = 1024$.

0001110010100010111011101001001100010001001001010000010010110111000000101011001010011011110111000000001011001110000000110011101010010000
10100110101101111100111111011011011010010101101110000001001001000100101110101001010101101010010011111000110100010001101001001011011101011
110000100101101010011001110000000100110001101001100001101101110001101010101101010111100110011110010000001111011000101001110000100101100010 1
1010110111100100010110 11111111111 000011001011101100110010010001110110011101001010110111011001011011011001010100100000101101010100000
1111001000011111110000111101100011001110010111100010111101111111010101100110110101011100110001101000010010101000011010101011001001110000
1000111001110000011001101001010101110111100110001001100101100111110101001000110000010000000011010100100100000011011000010100100101001101
0000111001111010100011100110011101101110101011000010000111011111010110011111101110111000101000011101110110010111011001011100110110000 11
100011000100001101010101010100011100101101011101100110 1000

(1000 Würfe: Der längste Einsen-Run hat Länge 11, der längste Nullen-Run hat Länge 7)

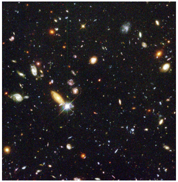
Beobachtung: Menschliche Zufallsgeneratoren lassen so lange Runs nicht zu.

Affen schreiben Shakespeare

Zurück zum Affen: Nehmen wir an, dass die Werke eine Million Zeichen lang sind und der Affe 40 Tasten mit gleicher Wahrscheinlichkeit tippt. (Wir lassen Groß- und Kleinschreibung weg.)

Wenn er $40^{1.000.000}$ Mal tippt, kann man erwarten, dass er einmal die Werke schreibt.

Das sind ganz schön viele Bücher voll ...



... und es ist öfter, als es Atome im Weltall gibt!

Eine mathematische Formulierung

- Sei E ein Ereignis, das zu einem Zeitpunkt $1, 2, 3, \ldots$ unabhängig geschehen kann.
- Fur $n \in \mathbb{N}$ sei A_n das Ereignis, dass E zum Zeitpunkt n geschieht.
- Murphys Gesetz sagt: mit Wahrscheinlichkeit 1 gibt es ein n, sodass A_n eintritt (zumindest wenn E ein schlechtes Ereignis ist ...).

Wenn Shakespeares Gesammelte Werke g Zeichen lang sind, dann sei E das Ereignis, dass diese Werke bei g Tastenanschlägen getippt werden. Dann ist A_n das Ereignis, dass die Werke vom $((n-1)g+1)$-ten bis zum ng-ten Tippen geschrieben werden.

Aber stimmt denn Murphys Gesetz hier? Und warum?

Eine mathematische Formulierung

- Sei E ein Ereignis, das zu einem Zeitpunkt $1, 2, 3, \dots$ unabhängig geschehen kann.
- Fur $n \in \mathbb{N}$ sei A_n das Ereignis, dass E zum Zeitpunkt n geschieht.
- Murphys Gesetz sagt: mit Wahrscheinlichkeit 1 gibt es ein n, sodass A_n eintritt (zumindest wenn E ein schlechtes Ereignis ist ...).

Wenn Shakespeares Gesammelte Werke g Zeichen lang sind, dann sei E das Ereignis, dass diese Werke bei g Tastenanschlägen getippt werden. Dann ist A_n das Ereignis, dass die Werke vom $((n-1)g+1)$-ten bis zum ng-ten Tippen geschrieben werden.

Aber stimmt denn Murphys Gesetz hier? Und warum?

JA: Wir werden sehen, dass der Affe die Werke unendlich oft abtippt!

(...übrigens auch den Bibeltext)

Was heißt denn "unendlich oft"?

Wir schreiben $\bigwedge$ statt "für alle" und $\bigvee$ statt " es gibt". Außerdem natürlich $\iff$ für "äquivalent".

Dann gilt für Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \dots$ das Folgende.

$$
\begin{aligned}
& A_n \text{ tritt für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ ein.} \\
& \quad \iff \text{Für jedes } k \in \mathbb{N} \text{ gibt es ein } n \geq k\text{, so dass } A_n \text{ eintritt} \\
& \quad \iff \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \bigvee_{n \geq k} A_n \text{ tritt ein}
\end{aligned}
$$

- Von diesem Ereignis wollen wir zeigen, dass es mit Wahrscheinlichkeit Eins eintritt.
- Das ist aber nicht leicht. Viel einfacher ist es, zu zeigen, dass das Gegenereignis mit Wahrscheinlichkeit Null eintritt.

Was ist aber das Gegenereignis?

Was ist das Gegenteil von “unendlich oft”?

Wir schreiben $\neg$ für Verneinung und benutzen die berühmten DE MORGAN**’schen Regeln**:

$$\neg\Big(\bigwedge_k E_k \text{ gilt}\Big) \iff \bigvee_k E_k \text{ gilt nicht},$$

$$\neg\Big(\bigvee_k E_k \text{ gilt}\Big) \iff \bigwedge_k E_k \text{ gilt nicht},$$

Also:

$$\neg\Big(A_n \text{ tritt für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ ein.}\Big)$$

$$\iff \neg\Big(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \bigvee_{n\geq k} A_n \text{ tritt ein}\Big)$$

$$\iff \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \neg\Big(\bigvee_{n\geq k} A_n \text{ tritt ein}\Big)$$

$$\iff \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\geq k} A_n \text{ tritt nicht ein}$$

$$\iff \text{Für fast alle } n \in \mathbb{N} \text{ tritt } A_n \text{ nicht ein}$$

Das Gegenteil von “für unendlich viele” ist also “für fast alle nicht”!

Erinnerung:

- A_n ist das Ereignis, dass der Affe im n-ten Abschnitt der Länge g die Shakespeare-Werke abtippt.
- Diese Ereignisse A_n sind zufällig.
- Jedes A_n hat die selbe Wahrscheinlichkeit p.
- p ist nicht Null, da der Affe jede Taste mit positiver Wahrscheinlichkeit treffen kann.
- Sie ist auch nicht Eins, da alle Tasten getroffen werden können.
- Die Wahrscheinlichkeiten für den Schnitt mehrerer A_n ist das Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten wegen der Unabhängigkeit der Tastenwahlen des Affen.

Die letzte Regel ist sehr wichtig:

Für unabhängige Ereignisse A_n mit $n \in I$ gilt $\mathbb{P}\big(A_n \text{ gilt für alle } n \in I\big) = \prod_{n \in I} \mathbb{P}(A_n)$.

Also berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\text{Der Affe schreibt die Werke unendlich oft}\Big) &= \mathbb{P}\Big(A_n \text{ tritt unendlich oft ein}\Big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big((\neg A_n) \text{ tritt für fast alle } n \in \mathbb{N} \text{ ein}\Big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigvee_{k\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\geq k} A_n \text{ tritt nicht ein}\Big) \\
&\geq 1 - \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\Big(\bigwedge_{n\geq k} A_n \text{ tritt nicht ein}\Big) \\
&= 1 - \sum_{k\in\mathbb{N}} \prod_{n\geq k} \mathbb{P}(A_n \text{ tritt nicht ein}) \\
&= 1 - \sum_{k\in\mathbb{N}} \prod_{n\geq k} (1-p) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

denn das unendliche Produkt einer Zahl in $(0, 1)$ ist Null.

Der Affe schreibt also mit Wahrscheinlichkeit Eins die Werke unendlich oft ab!

Die Produktformel

$$\mathbb{P}\big(A_n \text{ gilt für alle } n \in I\big) = \prod_{n \in I} \mathbb{P}(A_n)$$

ist nicht äquivalent zu der Unabhängigkeit der Ereignisse A_n mit $n \in I$, sondern nur eine Folgerung. Die Definition der Unabhängigkeit der Ereignisse A_n mit $n \in I$ lautet:

$$\text{Für jede Teilauswahl } J \subset I \text{ gilt} \qquad \mathbb{P}\big(A_n \text{ gilt für alle } n \in J\big) = \prod_{n \in J} \mathbb{P}(A_n).$$

Die Borel-Cantelli-Lemmata

Die Fundamente der meisten Aussagen über Unendlichkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie:

Erstes Borel-Cantelli-Lemma

Seien $A_1, A_2, A_3, \dots$ Ereignisse mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$.
Dann gilt $\mathbb{P}(A_n$ gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 0$.

Zweites Borel-Cantelli-Lemma

Seien $A_1, A_2, A_3, \dots$ unabhängige Ereignisse mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$.
Dann gilt $\mathbb{P}(A_n$ gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 1$.

Die Borel-Cantelli-Lemmata

Die Fundamente der meisten Aussagen über Unendlichkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie:

Erstes Borel-Cantelli-Lemma

Seien $A_1, A_2, A_3, \dots$ Ereignisse mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$.
Dann gilt $\mathbb{P}(A_n$ gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 0$.

Zweites Borel-Cantelli-Lemma

Seien $A_1, A_2, A_3, \dots$ unabhängige Ereignisse mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$.
Dann gilt $\mathbb{P}(A_n$ gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 1$.

Das Zweite BC-Lemma mit $\mathbb{P}(A_n) = p$ impliziert Murphys Gesetz!

Die Borel-Cantelli-Lemmata

Die Fundamente der meisten Aussagen über Unendlichkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie:

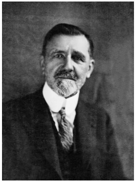
Erstes Borel-Cantelli-Lemma

Seien $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Ereignisse mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$.
Dann gilt $\mathbb{P}(A_n$ gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 0$.

Zweites Borel-Cantelli-Lemma

Seien $A_1, A_2, A_3, \ldots$ unabhängige Ereignisse mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$.
Dann gilt $\mathbb{P}(A_n$ gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}) = 1$.

Das Zweite BC-Lemma mit $\mathbb{P}(A_n) = p$ impliziert Murphys Gesetz!



Emile Borel

Francesco Paolo Cantelli