Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 9

Abgabe in den Übungen vom 14. bis 20. Dezember 2006

AUFGABE 9.1 (2 Punkte) — Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, nicht zu einer stetigen Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.

AUFGABE 9.2 (4 Punkte) — Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}, & \text{falls } x \neq 0,\\ 1 & \text{sonst.}\end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(ii) Entwickeln Sie f in eine Potenzreihe und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

AUFGABE 9.3 (4 Punkte) — Seien $M, N \subset \mathbb{C}$ disjunkt und sowohl $f_1\colon M\to\mathbb{C}$ als auch $f_2\colon N\to\mathbb{C}$ stetig. Wir betrachten die zusammengesetzte Funktion $f\colon M\cup N\to\mathbb{C}$, gegeben durch $f(x) = f_1(x)$, falls $x\in M$, und $f(x) = f_2(x)$, falls $x \in N$.

(i) Seien M und N offen. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(ii) Geben Sie ein (möglichst einfaches) Beispiel für M, N, f_1 und f_2 wie oben, so dass f nicht stetig ist.

Definition: Sei $D\subset\mathbb{C}$. Eine Funktion $f\colon D\to\mathbb{C}$ heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante* $L>0$, wenn für alle $x,y\in D$ gilt: $|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$.

AUFGABE 9.4 (3 Punkte) — Sei $X\subset\mathbb{C}$ eine nicht leere Menge. Wir betrachten die Abstandsfunktion $\mathrm{d}_X\colon\mathbb{C}\to[0,\infty)$, gegeben durch $\mathrm{d}_X(z) = \inf_{x\in X}|z-x|$. Zeigen Sie, dass d_X Lipschitz-stetig ist, und bestimmen Sie ihre kleinste Lipschitz-Konstante.

AUFGABE 9.5 (3 Punkte) — Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Funktion $f\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x<\sqrt{2},\\ 1, & \text{falls } x>\sqrt{2},\end{cases}$$

stetig ist.