Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 8

Abgabe in den Übungen vom 4. bis 7. Dezember 2007

AUFGABE 8.1 (4 Punkte) — Sei $\mathcal{B}_d$ die Borel-σ-Algebra auf dem $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass gelten:

(i) $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{K}_d)$, wobei $\mathcal{K}_d$ die Menge der kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ ist,

(ii) $\mathcal{B}_d = \sigma(\{\prod_{i=1}^d (-\infty, b_i]\colon b_1, \dots, b_d \in \mathbb{Q}\})$.

AUFGABE 8.2 (4 Punkte) — Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega\colon A \text{ oder } A^{\rm c} \text{ ist endlich}\}$. Definiere $\mu\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine Algebra und μ ein σ-endlicher Inhalt auf $\mathcal{F}$ ist.

(ii) Ist μ σ-additiv?

(iii) Ist μ stetig in $\emptyset$?

(iv) Lässt sich μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{F})$ fortsetzen?

AUFGABE 8.3 (2 Punkte) — Zeigen Sie, dass jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist.

AUFGABE 8.4 (2 Punkte) — Es sei $n > 2$ eine gerade Zahl und Ω eine Menge mit genau n Elementen. Zeigen Sie, dass das Teilmengensystem $\mathcal{F}$ aller Teilmengen mit gerader Kardinalität ein Dynkin-System ist, aber keine σ-Algebra.

AUFGABE 8.5 (4 Punkte) — Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum.

1. Zeigen Sie, dass
$$\overline{\mathcal{F}} = \{\, A \cup N\colon A \in \mathcal{F},\ N \subset \Omega \text{ Nullmenge} \,\}$$
eine σ–Algebra ist.
2. Es sei weiter $\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{F}} \to [0,\infty]$ definiert durch $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{F}$ und alle Nullmengen $N \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass $\overline{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(\Omega, \overline{\mathcal{F}})$ ist, das μ fortsetzt.

Hinweis: Der Maßraum $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ heißt die *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.