Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 7

Abgabe am 3. bis 6. Juni 2008

AUFGABE 7.1 (2 Punkte) — Benutzen Sie Faltungen, um zu zeigen, dass die Summe zweier unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsgrößen Poisson-verteilt ist, und bestimmen Sie den Parameter.

AUFGABE 7.2 (4 Punkte) — Es sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgröße mit erzeugender Funktion g.

(i) Berechnen Sie für jede $m, n \in \mathbb{N}_0$ die erzeugende Funktion von $mX + n$.

(ii) Der Konvergenzradius ϱ von g sei größer als Eins, und für $s \in (0, \varrho)$ sei $f(s) = \log g(s)$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X in Termen von f.

AUFGABE 7.3 (4 Punkte) — Es seien N und $X_1, X_2, \dots$ unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgrößen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, wobei $S_0 = 0$ gesetzt wird. Es sei weiterhin S_N die Zufallsgröße $S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega)$. Die erzeugende Funktion von N sei g, die von X_i sei f (d.h. alle X_i haben die gleiche Verteilung).

(i) Zeigen Sie, dass $g \circ f$ die erzeugende Funktion von S_N ist.

(ii) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_N unter der Voraussetzung, dass N und X_1 endlichen Erwartungswert und Varianz besitzen.

AUFGABE 7.4 (3 Punkte) — Es gelten die Voraussetzungen von Aufgabe 7.3. Die Verteilung von X_1 sei gegeben durch $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{-\log(1-p)} \frac{p^k}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$, wobei $p \in (0, 1)$ ein Parameter sei. Ferner sei N Poisson-verteilt. Zeigen Sie, dass S_N eine negative Binomialverteilung besitzt.

AUFGABE 7.5 (3 Punkte) — Geben Sie einen Beweis des Poisson'schen Grenzwertsatzes (Satz 1.3.7) unter wesentlicher Verwendung erzeugender Funktionen.