Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. Wolfgang König

# Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 7

Abgabe in den Übungen vom 27. bis 30. November 2007

Aufgabe 7.1 (5 Punkte) — Eine Menge $N \subset E = [0,1]^2$ mit $\lambda_E^*(N) = 0$ heißt eine (Lebesgue-) Nullmenge. Zeigen Sie Folgendes.

(i) Jede Nullmenge ist Lebesgue-messbar.

(ii) Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

(iii) Überabzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind i. Allg. keine Nullmengen.

(iv) Jede abzählbare Teilmenge von $E$ ist eine Nullmenge.

(v) Die Verbindungsstrecke von zwei beliebigen Punkten aus $E$ ist eine Nullmenge.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte) — Translationsinvarianz. Es sei $E = [0,1]^2$, und für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ und ein $x \in \mathbb{R}^2$ sei $A + x = \{a + x \colon a \in A\}$ die Verschiebung von $A$ um $x$.

(i) Zeigen Sie, dass für jede Menge $A \subset E$ und jedes $x \in E$ mit $A + x \subset E$ gilt: $\lambda_E^*(A) = \lambda_E^*(A + x)$.

(ii) Zeigen Sie, dass für jede Lebesgue-messbare Menge $A \subset E$ und jedes $x \in \mathbb{R}^2$ mit $A + x \subset E$ die Menge $A + x$ ebenfalls Lebesgue-messbar ist und dass gilt: $\lambda_E(A) = \lambda_E(A + x)$.

(iii) Zeigen Sie die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes $\lambda$ auf dem $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte) — Seien $\Omega$ und $\Omega'$ beliebige Mengen und sei $f \colon \Omega \to \Omega'$. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Ist $\mathcal{F}'$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega'$, so ist $f^{-1}(\mathcal{F}') = \{f^{-1}(A) \colon A \in \mathcal{F}'\}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$.
2. Ist $\mathcal{F}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$, so ist $f(\mathcal{F}) = \{f(A) \colon A \in \mathcal{F}\}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega'$.

Aufgabe 7.4 (3 Punkte) — Sei zu $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem $\mathcal{E}_n = \{\{1\}, \dots, \{n\}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeben, und sei $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{E}_n)$ die von $\mathcal{E}_n$ über $\mathbb{N}$ erzeugte $\sigma$–Algebra. Zeigen Sie:

1. $\mathcal{F}_n = \{\, A \subset \mathbb{N} \colon A \subset \{1, \dots, n\}$ oder $\{n+1, n+2, \dots\} \subset A \,\}$,
2. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$,
3. $\cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$ ist keine $\sigma$–Algebra über $\mathbb{N}$.