Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 7

Abgabe in den Übungen vom 30. November bis 6. Dezember 2006

AUFGABE 7.1 (4 Punkte) — Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in (1, \infty)$ und jedes $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-\alpha} \leq \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}.$$

Hinweis: Gehen Sie wie im Fall $\alpha = 1$ (harmonische Reihe) vor, und setzen Sie m als eine Zweierpotenz an.

Bemerkung: Wir halten die wichtige Tatsache fest, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert.

AUFGABE 7.2 (4 Punkte) — LEIBNIZ'SCHES KONVERGENZKRITERIUM. Zeigen Sie, dass für jede monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0, \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

Hinweis: Wenn $S_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$ bezeichnet, dann zeigen Sie zunächst, dass sowohl $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ als auch $(S_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt sind.

AUFGABE 7.3 (4 Punkte) — Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 3^{-n}$, (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}$, (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$.

AUFGABE 7.4 (4 Punkte) — CAUCHY'SCHES PRODUKT VON REIHEN. Es seien $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ absolut konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ebenfalls absolut konvergent ist mit

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n.$$

Hinweis: $\sum_{n=0}^{N} c_n$ ist die Summe der $a_k b_l$ über (k, l) in dem Dreieck $\Delta_N := \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \colon k + l \leq N\}$. Betrachten Sie auch die Summe über (k, l) in dem Quadrat $Q_N = \{0, \dots, N\}^2$, und benutzen Sie, dass $Q_N \setminus \Delta_N$ in $(Q_{\lfloor N/2 \rfloor})^{\mathrm{c}}$ liegt.

Zur Erinnerung: Eines der Übungsscheinkriterien ist das Erzielen von mindestens 56 Punkten auf den Aufgabenblättern 1 bis 7.