Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 6

Abgabe am 27. bis 29. Mai 2008

AUFGABE 6.1 (3 Punkte) — Berechnen Sie die Varianzen einer Binomial-verteilten und einer Poisson-verteilten Zufallsgröße.

AUFGABE 6.2 (3 Punkte) — Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten für die Anzahl der Einsen und die der Sechsen bei n-maligem unabhängigen Werfen eines fairen Würfels.

AUFGABE 6.3 (3 Punkte) — *Erwartungstreuer Schätzer für die Varianz*
Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, und es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsgrößen, die alle die gleiche Verteilung besitzen sowie den gleichen Erwartungswert m und die gleiche Varianz σ^2. Wir betrachten den Durchschnitt $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\Big] = \sigma^2.$$

AUFGABE 6.4 (4 Punkte) — Es seien X, Y und Z drei Zufallsgrößen mit identischer Verteilung. Es existiere eine Konstante c, so dass $X + Y + Z = c$ ist. Zeigen Sie, dass der Korrelationskoeffizient von Xund Y gleich $-\frac{1}{2}$ ist. Formulieren und beweisen Sie auch eine Variante dieser Aussage für mehr als drei Summanden.

AUFGABE 6.5 (3 Punkte) — Es seien X und Y zwei Zufallsgrößen mit endlichen, positiven Varianzen. Wie im Lemma 3.5.5 zeigt man, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[(Y - a - bX)^2]$ minimiert wird durch $a = \mathbb{E}[Y] - b\mathbb{E}[X]$ und $b = \mathrm{cov}(X, Y)/\mathbb{V}(X)$. Also wird Y am besten approximiert durch

$$\widetilde{Y} = a + bX = \mathbb{E}[Y] + \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\mathbb{V}(X)}\,(X - \mathbb{E}[X]).$$

(i) Zeigen Sie, dass X und $Y - \widetilde{Y}$ unkorreliert sind.

(ii) Zeigen Sie, dass $\widetilde{Y}$ und $Y - \widetilde{Y}$ unkorreliert sind.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(Y - \widetilde{Y}) = \mathbb{V}(Y)(1 - \rho(X, Y)^2)$ ist, wobei $\rho(X, Y)$ der Korrelationskoeffizient von X und Y ist.