Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 6

Abgabe in den Übungen vom 20. bis 23. November 2007

AUFGABE 6.1 (4 Punkte) — Prüfen Sie jeweils, ob die gegebene Funktion in $\mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^d)$ oder in $\mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$ liegt, und berechnen Sie ihr Integral.

(i) $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$, (ii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (x+y)\mathrm{e}^{x+y}\mathbb{1}_{(0,2)\times(1,2)}(x,y)$.

AUFGABE 6.2 (3 Punkte) — VOLUMEN EINES ROTATIONSKÖRPERS. Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig. Zeigen Sie, dass der Rotationskörper $K = \{(x,y) \in [a,b]\times\mathbb{R}^2\colon \|y\| \leq f(x)\}$ das Volumen $\mathrm{Vol}_3(K) = \pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$ besitzt.

AUFGABE 6.3 (4 Punkte) — Berechnen Sie das Volumen des Durchschnittes der beiden Zylinder

$$Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + z^2 \leq 1\} \qquad \text{und} \qquad Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

AUFGABE 6.4 (3 Punkte) — Es sei $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine positiv definite Matrix. Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon ax^2 + 2bxy + cy^2 \leq z \leq 1\}.$$

AUFGABE 6.5 (2 Punkte) — Seien $A, B \subset \mathbb{R}^2$ zwei elementare Mengen, d. h. Vereinigungen von disjunkten achsenparallelen beschränkten Rechtecken. Zeigen Sie, dass auch die Differenzmenge $A \setminus B$ und die symmetrische Differenz $A \triangle B$ elementar sind.