Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 6

Abgabe in den Übungen vom 23. bis 29. November 2006

AUFGABE 6.1 (3 Punkte) — Ermitteln Sie die Grenzwerte (sofern existent) der drei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n - \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

AUFGABE 6.2 (4 Punkte) —

(i) Zeigen Sie, dass jede monotone beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass für jede gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a.$$

AUFGABE 6.3 (3 Punkte) — Sei $a \in (0,\infty)$ fest. Wir definieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert, und ermitteln Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist.

AUFGABE 6.4 (3 Punkte) — Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ mit $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}$ gegeben ist als

$$r = \Big(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\Big)^{-1} \in [0,+\infty].$$

AUFGABE 6.5 (3 Punkte) — Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$(i) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\frac{3}{2})^n}, \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

Hinweise zur Klausur am 25. November 2006

- Die Klausur ist auf **90 Minuten** konzipiert und beginnt um **8:30 Uhr**. Jede(r) Teilnehmer(in) muss einen Lichtbildausweis, Schreibzeug (keine Bleistifte!) und genügend freies Papier in DIN A4 mitbringen. Ansonsten ist nur noch ein einseitig mit eigener Handschrift beschriebenes Blatt in DIN A4 mit beliebigem Inhalt zugelassen sowie bei Nicht-Deutschsprachigen ein Wörterbuch.
- Diejenigen Teilnehmer(innen), deren Nachname mit einem Buchstaben zwischen ‘A’ und ‘K’ beginnt, schreiben ihre Klausur im Großen Hörsaal in der Jahnallee, alle anderen im Großen Hörsaal im Carl-Ludwig-Institut in der Liebigstr. 27.