Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 5

Abgabe am 20. bis 22. Mai 2008

AUFGABE 5.1 (3 Punkte) — Es seien X, Y und Z drei unabhängige, auf $\mathbb{N}_0$ geometrisch zum Parameter $p \in (0,1)$ verteilte Zufallsgrößen. Berechnen Sie die Werte der drei Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq Y)$, $\mathbb{P}(X < Y)$ und $\mathbb{P}(X = Y = Z)$.

AUFGABE 5.2 (3 Punkte) — Beweisen Sie Lemma 3.3.8: Der Erwartungswert einer $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsgröße X ist gegeben durch

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k),$$

auch wenn eine der beiden Seiten nicht endlich ist.

AUFGABE 5.3 (3 Punkte) — Berechnen Sie den Erwartungswert einer hypergeometrisch verteilten Zufallsgröße.

AUFGABE 5.4 (3 Punkte) — Wir betrachten den Julklapp aus Aufgaben 2.5 und 4.3. Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Kinder, die ihr eigenes Geschenk erhalten.
Hinweis: Benutzen Sie besser *nicht* das Ein-Ausschlussprinzip oder die explizit bekannte Verteilung dieser Anzahl (die Sie ja aus Aufgabe 4.3 kennen).

AUFGABE 5.5 (4 Punkte) — In der Zahlentheorie bezeichnet man als *Euler'sche φ-Funktion* die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(n) =$ Anzahl der zu N teilerfremden Zahlen in $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$ fur $n \geq 2$. Zeigen Sie: Ist $n = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}$ die Primfaktorzerlegeung von n in paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ und Potenzen $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ereignisse $A_i = \Omega_n \cap p_i\mathbb{N}$.