Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 5

Abgabe in den Übungen vom 13. bis 16. November 2007

AUFGABE 5.1 (4 Punkte) — Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f\colon K \to [0,\infty)$ stetig. Mit $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die triviale Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^d$ mit $\widetilde{f}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$. Zeigen Sie, dass $\widetilde{f}$ in $\mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^d)$ liegt.

AUFGABE 5.2 (4 Punkte) —

(i) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau dann in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ von unten halbstetig ist, wenn gilt:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{y \in \mathbb{R}^d \colon \|y-x\| < \varepsilon} f(y) = f(x).$$

(ii) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau dann von unten halbstetig ist, wenn die Niveaumengen $\{f \le s\} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \le s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ abgeschlossen sind.

AUFGABE 5.3 (2 Punkte) — Zeigen Sie, dass jede unterhalbstetige Funktion auf einem Kompaktum ihr Minimum annimmt.
Hinweis: Benutzen Sie, dass eine Menge K genau dann kompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist, d. h. wenn jede Folge in K eine Teilfolge besitzt, die einen Grenzwert in K besitzt.

AUFGABE 5.4 (3 Punkte) — Mit einem $a > 0$ sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} (a^2 - x^2)^{-1/2}, & \text{falls } |x| < a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Konstruieren Sie explizit eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ mit $f_n \uparrow f$, und zeigen Sie damit, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ (definiert im Sinne der Definition in Abschnitt 1.5) gleich dem uneigentlichen Riemann-Integral der Einschränkung von f auf $(-a,a)$ ist.

AUFGABE 5.5 (3 Punkte) — Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f\colon K \to [0,\infty)$ stetig. Wir betrachten die folgende kompakte Menge im $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$K_f = \{(x,y) \in K \times [0,\infty) \colon y \in [0, f(x)]\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Vol}_{d+1}(K_f) = \int_K f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.