Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 4

Abgabe in den Übungen vom 6. bis 9. November 2007

AUFGABE 4.1 (4 Punkte) — Es sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \|(x,y)\| < 1\}$ die offene zentrierte Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ sowie

$$f \colon B \setminus ([0,1) \times \{0\}) \to \mathbb{R} \qquad \text{definiert durch } f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{1}{2}.$$

Zeigen Sie, dass f zu einer Funktion $\widehat{f} \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(V)$ (mit $V = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty) \times \{0\})$) fortgesetzt werden kann, und berechnen Sie $\int_V \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

AUFGABE 4.2 (4 Punkte) — *Jacobi-Identität.* Zeigen Sie für lineare Differentialoperatoren L_1, L_2, L_3 in einer gegebenen offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^d$:

$$[[L_1, L_2], L_3] + [[L_2, L_3], L_1] + [[L_3, L_1], L_2] = 0.$$

Hierbei ist $[L_1, L_2] = L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1$ der *Kommutator* von L_1 und L_2.

AUFGABE 4.3 (4 Punkte) — Wir betrachten das n-te *Legendre-Polynom*

$$P_n(t) = \frac{1}{n!2^n}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^n (t^2-1)^n, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(r,\vartheta) = r^n P_n(\cos\vartheta)$ der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ bezüglich räumlicher Polarkoordinaten genügt.
Hinweis: Das Legendre-Polynom löst die *Legendre-Differentialgleichung* $(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0$.

AUFGABE 4.4 (4 Punkte) — *Ebene elliptische Koordinaten.* Wir betrachten die Abbildung $\Phi\binom{u}{v} = \binom{x}{y}$ mit

$$x = \sin u \, \cosh v \qquad \text{und} \qquad y = \cos u \, \sinh v.$$

(i) Beschreiben Sie diese Transformation bei festem u bzw. festem v mittels Skizzen, geben Sie einen möglichst großen Bereich in der (u,v)-Ebene an, in dem Φ injektiv ist, und bestimmen Sie das Bild dieses Bereiches unter Φ.

(ii) Drücken Sie den Laplace-Operator in (u,v)-Koordinaten aus.