Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. Wolfgang König

Analysis A: Übungsblatt 4

Abgabe in den Übungen vom 9. bis 15. November 2006

AUFGABE 4.1 (4 Punkte) — Es sei $M \subset \mathbb{R}$ bzw. $M \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der Abschluss $\overline{M}$ von M und der Rand ∂M von M abgeschlossen sind.

AUFGABE 4.2 (4 Punkte) — Es seien U, V Teilmengen von $\mathbb{C}$ und U offen. Zeigen Sie, dass $U \cap \overline{V}$ eine Teilmenge von $\overline{U \cap V}$ ist.

AUFGABE 4.3 (4 Punkte) — Wir betrachten die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$(i) \quad S = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\} \setminus [0,1), \qquad \text{und} \qquad (ii) \quad S = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left(\tfrac{1}{n} + \mathrm{i}\,[0,n]\right).$$

Hierbei wird $[0,1)$ als $\{a + \mathrm{i}b \colon a \in [0,1), b = 0\}$ aufgefasst, und für $r \in \mathbb{R}$ und $A \subset \mathbb{R}$ wird die Menge $r + \mathrm{i}A$ als $\{r + \mathrm{i}a \colon a \in A\}$ aufgefasst.
Bestimmen Sie jeweils die Mengen S°, ∂S und $\overline{S}$.

AUFGABE 4.4 (4 Punkte) — Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Die Menge

$$K = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{N}\, \forall n > m \colon a_n \geq x\}$$

ist aus dem Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß bekannt. Dort wurde auch bewiesen, dass das Supremum von K ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Zeigen Sie, dass dieses Supremum ihr *kleinster* Häufungspunkt ist.