

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 3

Abgabe am 29. und 30. April 2008

AUFGABE 3.1 (3 Punkte)— Auf einer Meeresfarm werden Muscheln zur Perlengewinnung gezüchtet. Dabei bringt jede 50. Muschel eine Perle hervor. Berechnen Sie die folgenden Fragen jeweils zunächst exakt und dann näherungsweise mit Hilfe der Poissonapproximation. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

1. Wieviele Muscheln müssen geöffnet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50 % mindestens eine Perle zu finden?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 100 Muscheln keine Perle zu finden?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zwei Perlen unter 100 Muscheln zu finden?

Geben Sie bei allen folgenden Aufgaben explizit den genutzten Wahrscheinlichkeitsraum an.

AUFGABE 3.2 (3 Punkte) — Ein Assistent kennt die Arbeitsgruppe der Studenten A , B und C schon lange und weiß, dass Student A 80%, Student B 15% und Student C nur 5% der Aufgaben bearbeitet und sie es so organisieren, dass keine Aufgabe doppelt bearbeitet wird. Aufgrund ihrer unterschiedlichen Erfahrungen lösen sie ihre Aufgaben jeweils nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%, 50% bzw. 10% fehlerfrei.

Der Assistent hat von der Arbeitsgruppe eine fehlerhafte Lösung erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie jeweils von A , B bzw. C ? Welche dieser Wahrscheinlichkeiten ist am größten?

AUFGABE 3.3 (3 Punkte) — DAS ZIEGENPROBLEM. Zwei von drei Gefangenen A , B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wächter (der weiß, wer hingerichtet werden soll), ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. Der Wächter antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A , dass sich seine Überlebenschancen auf $1/2$ erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.

Hat er Recht? Berücksichtigen Sie bei Ihrer Antwort möglichst viele plausible (zufällige) Antwortstrategien des Wächters.

AUFGABE 3.4 (3 Punkte) — Zeigen Sie, dass beim zweimaligen Ziehen je einer Kugel aus einer gut gemischten Urne mit s schwarzen und w weißen Kugeln die beiden Ereignisse ‘die erste Kugel ist weiß’ und ‘die zweite Kugel ist weiß’ unabhängig sind, wenn nach dem ersten Ziehen die gezogene Kugel zurückgelegt wurde, aber nicht, wenn dies nicht geschah.

AUFGABE 3.5 (4 Punkte) — POLYAS URNE. In einer Urne sind b blaue Kugeln und s schwarze. Wir ziehen zufällig eine der in der Urne befindlichen Kugeln und legen diese Kugel wieder zurück, zusammen mit weiteren d Kugeln der selben Farbe. (Hierbei sind b , s und $d \in \mathbb{N}$ gegeben.) Dies wiederholen wir unbeschränkt oft. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass im n -ten Zug eine schwarze Kugel gezogen wird. Zeigen Sie, dass $p_n = p_1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.