Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. Wolfgang König

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 3

Abgabe in den Übungen vom 30. Oktober bis 2. November 2007

Aufgabe 3.1 (4 Punkte) — Im $\mathbb{R}^d$ betrachten wir den Halbraum $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^d \colon x_d > 0\}$ und im $\mathbb{R}^{d-1}$ die offene Kugel $K = \{u \in \mathbb{R}^{d-1} \colon \|u\| < 1\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$T\colon (0,\infty) \times K \to H_+, \quad \text{gegeben durch } T(r,u) = \big(ru, r\sqrt{1-\|u\|^2}\big).$$

Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(H_+)$ gilt:

$$\int_{H_+} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{(0,\infty)\times K} f(T(r,u)) \frac{r^{d-1}}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\,\mathrm{d}(r,u).$$

Aufgabe 3.2 (6 Punkte) — *Räumliche Polarkoordinaten.* Sei die Halbebene $H = S \times \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben, wobei $S = \{\binom{r}{0} \colon r \in [0,\infty)\}$. Wir betrachten $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus H$ und $\Omega' = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ sowie die Abbildung

$$\Phi\colon \Omega' \to \Omega, \quad \text{gegeben durch } \Phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass Φ eine bijektive, $\mathcal{C}^1$-invertierbare Abbildung ist.

(ii) Wenden Sie den Transformationssatz auf Φ an, um eine explizite Formel für $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ für $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\Omega)$ anzugeben.

(iii) Benutzen Sie die Formel aus (ii), um für eine beliebige stetige Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger das Integral $\int_{\mathbb{R}^3} f(\|x\|)\,\mathrm{d}x$ auf ein eindimensionales Integral zurückzuführen.

Aufgabe 3.3 (6 Punkte) — *Jacobi-Transformation.* Definiere $J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$J\binom{u}{v} = \binom{u(1-v)}{uv}.$$

(i) Zeigen Sie, dass J eine $\mathcal{C}^1$-invertierbare Abbildung von $(0,\infty)\times(0,1)$ auf $(0,\infty)^2$ ist.

(ii) Wenden Sie den Transformationssatz auf die Funktion in (i) an, um die folgende Identifikation des *Euler'schen Beta-Integrals* zu beweisen:

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad p,q \in (0,\infty),$$

wobei Γ die Gamma-Funktion bezeichnet.

Hinweis zu (ii): Integrieren Sie die Abbildung $(x,y) \mapsto x^{p-1}\mathrm{e}^{-x} y^{q-1}\mathrm{e}^{-y}$ über $(0,\infty)^2$.